Materiał ćwiczeniowy z matematyki

Poziom rozszerzony

Styczeń 2011

Schemat oceniania

Zadanie 1. (*4 pkt*)

Rozwiąż nierówność $|x|+|x-4| \le 6-x$.

<u>I sposób rozwiązania</u> (wyróżnienie na osi liczbowej przedziałów)

Wyróżniamy na osi liczbowej przedziały: $(-\infty, 0)$, $\langle 0,4)$, $\langle 4,+\infty)$.

Rozwiązujemy nierówności w poszczególnych przedziałach i w każdym przedziale bierzemy część wspólną tego przedziału z otrzymanym zbiorem rozwiązań nierówności.

$x \in (-\infty, 0)$	$x \in \langle 0,4)$	$x \in \langle 4,+\infty)$
$-x-x+4 \le 6-x$ $-x \le 2$ $x \ge -2$ W tym przypadku rozwiązaniem nierówności jest $\langle -2,0)$	$x-x+4 \le 6-x$ $x \le 2$ W tym przypadku rozwiązaniem nierówności jest $\langle 0, 2\rangle$	$x+x-4 \le 6-x$ $3x \le 10$ $x \le \frac{10}{3}$ Brak rozwiązania

Łącząc otrzymane rozwiązania, podajemy ostateczną odpowiedź: $-2 \le x \le 2$ lub zapisujemy odpowiedź: Zbiorem rozwiązań nierówności jest $\langle -2, 2\rangle$.

<u>II sposób rozwiązania</u> (zapisanie czterech przypadków)

Zapisujemy cztery przypadki: $\begin{cases} x \ge 0 \\ x-4 \ge 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x \ge 0 \\ x-4 < 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x < 0 \\ x-4 \ge 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x < 0 \\ x-4 < 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x \ge 0 \\ x-4 \ge 0 \end{cases}$	$\begin{cases} x \ge 0 \\ x-4 < 0 \end{cases}$	$\begin{cases} x < 0 \\ x-4 \ge 0 \end{cases}$	$\begin{cases} x < 0 \\ x-4 < 0 \end{cases}$
$\begin{cases} x \ge 0 \\ x-4 \ge 0 \\ x+x-4 \le 6-x \end{cases}$	$\begin{cases} x \ge 0 \\ x-4 < 0 \\ x-x+4 \le 6-x \end{cases}$	niemożliwe	$\begin{cases} x < 0 \\ x-4 < 0 \\ -x-x+4 \le 6-x \end{cases}$
$\begin{cases} x \ge 0 \\ x \ge 4 \\ 3x \le 10 \end{cases}$	$\begin{cases} x \ge 0 \\ x-4 < 0 \\ x \le 2 \end{cases}$		$\begin{cases} x < 0 \\ x < 4 \\ -x \le 2 \end{cases}$
$\begin{cases} x \ge 0 \\ x \ge 4 \\ x \le \frac{10}{3} \end{cases}$	$\begin{cases} x \ge 0 \\ x < 4 \\ x \le 2 \end{cases}$		$\begin{cases} x < 0 \\ x < 4 \\ x \ge -2 \end{cases}$
$x \in \varnothing$	$x \in \langle 0, 2\rangle$		$x \in \langle -2, 0)$

Łącząc otrzymane rozwiązania, podajemy ostateczną odpowiedź: $-2 \le x \le 2$ lub zapisujemy odpowiedź: Zbiorem rozwiązań nierówności jest $\langle -2, 2\rangle$.

Schemat oceniania I i II sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 1 pkt

- zdający wyróżni na osi liczbowej przedziały $(-\infty, 0)$, $\langle 0, 4)$, $\langle 4, +\infty)$

albo

- zapisze cztery przypadki: $\begin{cases} x \ge 0 \\ x-4 \ge 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x \ge 0 \\ x-4 < 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x < 0 \\ x-4 \ge 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x < 0 \\ x-4 < 0 \end{cases}$.

Uwaga

Jeżeli zdający popełni błędy w wyznaczaniu przedziałów, ale nie są one konsekwencją błędu rachunkowego popełnionego przy przekształcaniu nierówności, to przyznajemy **0 punktów.** Podobnie **0 punktów** otrzymuje zdający, który błędnie zapisał cztery przypadki (patrz też uwaga 1.).

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 2 pkt

Zdający zapisze nierówności w poszczególnych przedziałach, np.

I. $x \in (-\infty, 0)$ $\quad -x-x+4 \le 6-x$

II. $x \in \langle 0, 4)$ $\quad x-x+4 \le 6-x$

III. $x \in \langle 4, +\infty)$ $\quad x+x-4 \le 6-x$

Uwagi

1. Jeżeli zdający rozwiąże nierówności w poszczególnych przedziałach i na tym zakończy lub nie wyznaczy części wspólnej otrzymywanych wyników z poszczególnymi przedziałami, to otrzymuje **2 punkty**.
2. Jeżeli zdający rozpatrzy cztery przypadki, rozwiąże nierówności w poszczególnych przedziałach, stwierdzi, że czwarty przypadek jest niemożliwy i na tym zakończy lub nie wyznacza części wspólnej otrzymywanych wyników z poszczególnymi przedziałami, to otrzymuje **2 punkty**.

Rozwiązanie zadania do końca, lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) .... 3 pkt

- zdający poprawnie rozwiąże wszystkie trzy nierówności i wyznaczy części wspólne otrzymanych wyników z poszczególnymi przedziałami tylko w dwóch przypadkach, popełni błąd w trzecim przypadku i konsekwentnie doprowadzi rozwiązanie do końca

albo

- zdający poprawnie rozwiąże nierówności tylko w dwóch przedziałach i wyznaczy części wspólne otrzymanych wyników z poszczególnymi przedziałami i konsekwentnie doprowadzi rozwiązanie do końca

albo

- zdający rozpatrzy cztery przypadki, poprawnie rozwiąże nierówności i wyznaczy części wspólne otrzymanych wyników z poszczególnymi przedziałami tylko w dwóch przypadkach, stwierdzi, że czwarty jest niemożliwy, popełni błąd w trzecim przypadku i konsekwentnie doprowadzi rozwiązanie do końca.

Rozwiązanie pełne .... 4 pkt

Zdający zapisze odpowiedź: $x \in \langle -2, 2 \rangle$.

Uwaga

We wszystkich rozważanych przypadkach zdający może rozpatrywać obie nierówności nieostre (przedziały obustronnie domknięte). Jeżeli natomiast rozważy wszystkie nierówności ostre (przedziały otwarte), to przyznajemy za całe zadanie o **1 pkt mniej**, niż gdyby wyróżnił wszystkie przedziały poprawnie.

III sposób rozwiązania (graficznie)

Wyróżniamy na osi liczbowej przedziały: $(-\infty, 0)$, $\langle 0,4)$, $\langle 4,+\infty)$.

Zapisujemy wzór funkcji $f(x)=|x|+|x-4|$ w poszczególnych przedziałach bez wartości bezwzględnej, np.

I. $x\in(-\infty, 0)$ $\quad f(x)=-x-x+4$

II. $x\in\langle 0,4)$ $\quad f(x)=x-x+4$

III. $x\in\langle 4,+\infty)$ $\quad f(x)=x+x-4$

Przekształcamy wzór funkcji *f* w poszczególnych przedziałach do postaci $f(x)=ax+b$:

I. $x\in(-\infty, 0)$ $\quad f(x)=-2x+4$

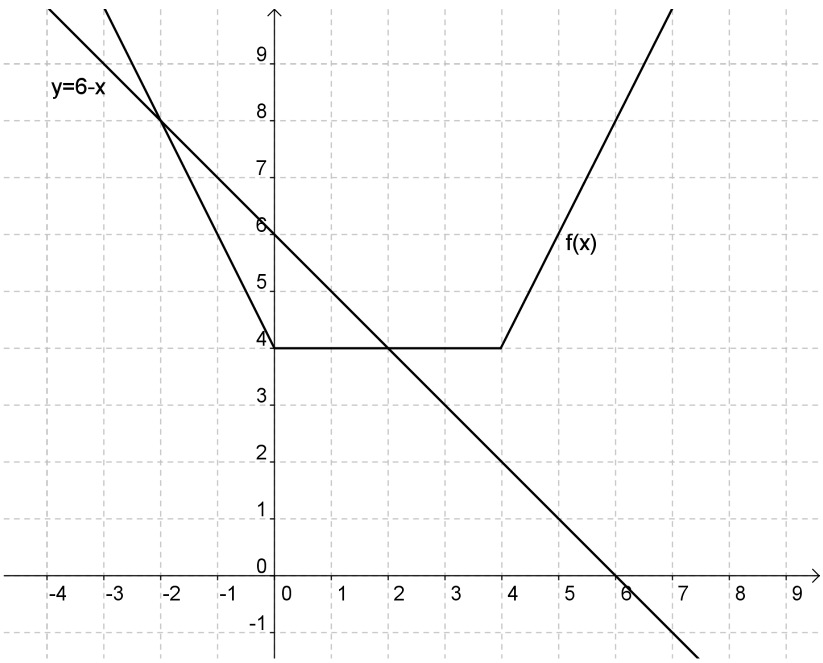
II. $x\in\langle 0,4)$ $\quad f(x)=4$

III. $x\in\langle 4,+\infty)$ $\quad f(x)=2x-4$

lub

$$f(x)=\begin{cases}-2x+4 & dla\ \ x\in(-\infty,0)\\ 4 & dla\ \ x\in\langle 0,4)\\ 2x-4 & dla\ \ x\in\langle 4,+\infty)\end{cases}$$

Rysujemy wykres funkcji *f* i prostą o równaniu $y=6-x$.



Odczytujemy odcięte punktów przecięcia się wykresu funkcji *f* i prostej o równaniu $y=6-x$:
$x=-2$ i $x=2$.

Podajemy argumenty, dla których $f(x)\le 6-x$: $x\in\langle -2, 2\rangle$.

Schemat oceniania III sposobu oceniania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania .... 1 pkt

Zdający wyróżni przedziały: $\left(-\infty, 0\right)$, $\left\langle 0,4\right)$, $\left\langle 4,+\infty\right)$.

Uwaga

Jeżeli zdający popełni błędy w wyznaczaniu przedziałów, to przyznajemy **0 punktów** za całe zadanie.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 pkt

Zdający zapisze wzór funkcji *f* w poszczególnych przedziałach, np.

I. $x\in\left(-\infty, 0\right)$ $f\left(x\right)=-2x+4$

II. $x\in\left\langle 0,4\right)$ $f\left(x\right)=4$

III. $x\in\left\langle 4,+\infty\right)$ $f\left(x\right)=2x-4$

lub

$$f\left(x\right)=\begin{cases}-2x+4 & dla\ \ x\in\left(-\infty, 0\right)\\ 4 & dla\ \ x\in\left\langle 0,4\right)\\ 2x-4 & dla\ \ x\in\left\langle 4,+\infty\right)\end{cases}$$

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 pkt

Zdający narysuje wykres funkcji *f* i prostą o równaniu $y=6-x$.

Uwaga

Jeżeli zdający poprawnie narysuje wykres funkcji f i prostą o równaniu $y=6-x$ oraz z rozwiązania wynika, że rozwiązuje nierówność, a nie równanie, i na tym poprzestanie lub błędnie wyznaczy zbiór rozwiązań nierówności, to otrzymuje **3 punkty** za całe rozwiązanie.

Rozwiązanie pełne .... 4 pkt

Zdający zapisze odpowiedź: $x\in\left\langle -2, 2\right\rangle$.

Uwaga

We wszystkich rozważanych przypadkach zdający może rozpatrywać obie nierówności nieostre (przedziały obustronnie domknięte). Wymagamy tylko, aby te przypadki wyczerpywały wszystkie liczby rzeczywiste. Jeżeli natomiast rozważa nierówności ostre (przedziały otwarte), tak, że nie wyczerpują one wszystkich liczb rzeczywistych, to przyznajemy za całe zadanie o **1 punkt mniej**, niż gdyby wyróżnił wszystkie przedziały poprawnie.

Zadanie 2. (*4 pkt*)

Wielomian $W(x)=x^3+bx^2+cx-4$ jest podzielny przez trójmian kwadratowy x^2-x-2. Wyznacz współczynniki *b* i *c* wielomianu *W(x).*

<u>I sposób rozwiązania</u>

Wyznaczamy pierwiastki trójmianu x^2-x-2: $\Delta=9$ $x_1=-1$ $x_1=2$.
Zatem $x^2-x-2=(x+1)(x-2)$.
Z podzielności wielomianu $W(x)=x^3+bx^2+cx-4$ przez trójmian x^2-x-2 wynika, że -1 i 2 są pierwiastkami $W(x)$.

Z twierdzenia Bèzout wynika, że $\begin{cases} W(-1)=0 \\ W(2)=0 \end{cases}$.

Rozwiązujemy układ równań otrzymując kolejno

$$\begin{cases} (-1)^3+b\cdot(-1)^2+c\cdot(-1)-4=0 \\ 2^3+b\cdot 2^2+2c-4=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -1+b-c-4=0 \\ 8+4b+2c-4=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b-c=5 \\ 2b+c=-2 \end{cases}$$

$3b=3$
$b=1$
$1-c=5$
$c=-4$

Współczynniki *b* i *c* wielomianu *W(x)* są równe: $b=1$ i $c=-4$.

<u>Schemat oceniania I sposobu rozwiązania</u>

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego do rozwiązania zadania ....1 pkt

Wyznaczenie pierwiastków trójmianu x^2-x-2: -1 i 2.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania ....2 pkt

Zapisanie układu równań: $\begin{cases} (-1)^3+b\cdot(-1)^2+c\cdot(-1)-4=0 \\ 2^3+b\cdot 2^2+2c-4=0 \end{cases}$.

Rozwiązanie zadania do końca, lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) ....3 pkt

Rozwiązanie układu równań z błędem rachunkowym.

Rozwiązanie pełne...4 pkt

Rozwiązanie układu równań: $\begin{cases} b=1 \\ c=-4 \end{cases}$.

Uwagi

1. Jeżeli zdający popełni błąd rachunkowy, w wyniku którego otrzyma inny układ równań niż podany i konsekwentnie do tego rozwiąże zadanie, to otrzymuje **3 punkty**. Jeżeli natomiast zdający poprzestanie na zapisaniu układu, w którym jedno równanie jest błędne, a drugie poprawne, to otrzymuje **1 punkt**.
2. Jeżeli zdający w rozwiązaniu popełni więcej niż jeden błąd rachunkowy, to może otrzymać maksymalnie **2 punkty** za całe rozwiązanie.

II sposób rozwiązania

Wykonujemy dzielenie wielomianu $W(x) = x^3 + bx^2 + cx - 4$ przez trójmian kwadratowy $x^2 - x - 2$.

$$
\begin{array}{l}
\left(x^3 + bx^2 + cx - 4\right) : \left(x^2 - x - 2\right) = x + b + 1 \\
\underline{-x^3 + x^2 + 2x} \\
\quad (b+1)x^2 + (c+2)x - 4 \\
-\underline{(b+1)x^2 + (b+1)x + 2b - 2} \\
\qquad\qquad (b+c+3)x + 2b - 2
\end{array}
$$

Reszta z dzielenia jest równa $R(x) = (b+c+3)x + 2b - 2$. Ponieważ $W(x)$ jest podzielny przez $x^2 - x - 2$, więc $R(x) = 0$.

Rozwiązujemy równanie $(b+c+3)x + 2b - 2 = 0$.

$\begin{cases} b+c+3=0 \\ 2b-2=0 \end{cases}$ $\begin{cases} b+c+3=0 \\ b=1 \end{cases}$ $\begin{cases} 1+c+3=0 \\ b=1 \end{cases}$ $\begin{cases} c=-4 \\ b=1 \end{cases}$

Zatem współczynniki *b* i *c* wielomianu *W(x)* są równe: $b=1$ i $c=-4$.

Schemat oceniania II sposobu rozwiązania

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 2pkt

Wykonanie dzielenia wielomianu $W(x) = x^3 + bx^2 + cx - 4$ przez trójmian kwadratowy $x^2 - x - 2$ i zapisanie reszty z dzielenia: $(b+c+3)x + 2b - 2$.

Rozwiązanie zadania do końca, lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) 3pkt

Zapisanie układu równań: $\begin{cases} b+c+3=0 \\ 2b-2=0 \end{cases}$

Rozwiązanie pełne .... 4 pkt

Rozwiązanie układu równań: $\begin{cases} c=-4 \\ b=1 \end{cases}$.

Zadanie 3. (*4 pkt*)

Wyznacz wszystkie rozwiązania równania $\frac{tgx}{\cos x} - 2\sin x = 0$.

Rozwiązanie

Wyznaczamy dziedzinę równania: $\cos x \neq 0$, więc $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, gdzie k jest liczbą całkowitą.

Korzystając ze związków między funkcjami trygonometrycznymi przekształcamy równanie do postaci, w której występuje tylko jedna funkcja trygonometryczna:

$tgx = \frac{\sin x}{\cos x}$ $\qquad \sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$$\frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{\cos x} - 2\sin x = 0$$

$$\frac{\sin x}{\cos^2 x} - 2\sin x = 0 \quad /\cdot \cos^2 x$$

$$\sin x - 2\sin x\left(1 - \sin^2 x\right) = 0$$

$$2\sin^3 x - \sin x = 0$$

Rozwiązujemy równanie trzeciego stopnia $2\sin^3 x - \sin x = 0$.

$$\sin x\left(2\sin^2 x - 1\right) = 0$$

$\sin x = 0$ lub $2\sin^2 x - 1 = 0$

$\sin^2 x = \frac{1}{2}$

$\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ lub $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$x = k\pi$ $\qquad x = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}k\pi$, gdzie k jest liczbą całkowitą.

Rozwiązaniami równania $\frac{tgx}{\cos x} - 2\sin x = 0$ są : $x = k\pi$ lub $x = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}k\pi$, gdzie k jest liczbą całkowitą.

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 pkt

Zapisanie równania w zależności od jednej funkcji trygonometrycznej, np.

$\sin x - 2\sin x\left(1 - \sin^2 x\right) = 0$ lub $\frac{\sin x}{1 - \sin^2 x} - 2\sin x = 0$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 pkt

Rozwiązanie równania $\sin x = 0$ lub $2\sin^2 x - 1 = 0$: $x = k\pi$ lub $x = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}k\pi$, gdzie k jest liczbą całkowitą.

Rozwiązanie pełne .... 4 pkt

Rozwiązanie równania $\frac{tgx}{\cos x} - 2\sin x = 0$: $x = k\pi$ lub $x = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}k\pi$, gdzie k jest liczbą całkowitą.

Uwagi

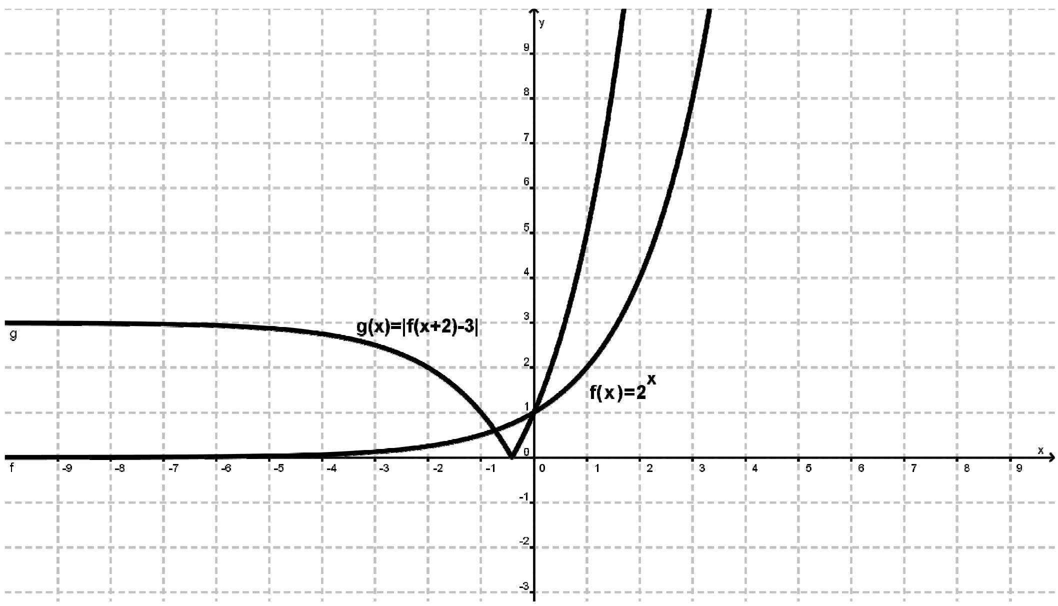
1. Jeżeli zdający poprawnie przekształci równanie do postaci, w której występuje tylko jedna funkcja trygonometryczna bez żadnych założeń i na tym poprzestanie, to przyznajemy **1 punkt**.
2. Jeżeli zdający rozwiąże zadanie bez żadnych założeń, to przyznajemy maksymalnie **3 punkty.**
3. Jeżeli zdający popełni błąd przy przekształcaniu równania $\frac{tgx}{\cos x} - 2\sin x = 0$ do postaci, w której występuje tylko jedna funkcja trygonometryczna, otrzyma równanie trzeciego stopnia i konsekwentnie rozwiąże zadanie do końca, to przyznajemy **3 punkty**. 0
4. Jeżeli zdający rozwiązując równanie $2\sin^2 x - 1 = 0$ uwzględni tylko rozwiązanie dodatnie, to za całe zadanie przyznajemy maksymalnie **3 punkty**.

Zadanie 4. (*4 pkt*)

Narysuj wykres funkcji $f(x) = 2^x$, a następnie narysuj wykres funkcji $g(x) = |f(x+2) - 3|$.

Rozwiązanie

W układzie współrzędnych rysujemy wykres funkcji $f(x) = 2^x$. Następnie wykonujemy przesunięcie wykresu funkcji f o wektor $\vec{u} = [-2, -3]$, otrzymując wykres funkcji $f(x+2) - 3$. Wykorzystując własności wartości bezwzględnej przekształcamy wykres funkcji $f(x+2) - 3$ i otrzymujemy wykres funkcji $g(x) = |f(x+2) - 3|$.



Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania .... 1 pkt
Narysowanie wykresu funkcji $f(x)=2^x$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 pkt
Narysowanie wykresu funkcji f przesuniętej o wektor $\vec{v}_1=[0,-3]$ lub o wektor $\vec{v}_2=[-2,0]$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania.. 3 pkt
Narysowanie wykresu funkcji f przesuniętej o wektor $\vec{u}=[-2,-3]$.

Rozwiązanie pełne .... 4 pkt
Narysowanie wykresu funkcji $g(x)=|f(x+2)-3|$.

Zadanie 5. (*4 pkt*)

Dany jest okrąg o równaniu $x^2+y^2-10x+4y+25=0$. Napisz równania stycznych do tego okręgu, przechodzących przez początek układu współrzędnych.

I sposób rozwiązania

Proste styczne do okręgu $x^2+y^2-10x+4y+25=0$, przechodzące przez początek układu współrzędnych, mają równanie postaci $y=mx$.
By wyznaczyć współczynnik kierunkowy *m*, rozwiązujemy układ równań

$$\begin{cases} y=mx \\ x^2+y^2-10x+4y+25=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=mx \\ x^2+(mx)^2-10x+4mx+25=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=mx \\ x^2(m^2+1)-x(10-4m)+25=0 \end{cases}$$

Rozwiązujemy równanie $x^2(m^2+1)-x(10-4m)+25=0$.

$$\Delta=(-(10-4m))^2-4(m^2+1)\cdot 25=100-80m+16m^2-100m^2-100=-84m^2-80m$$

Aby styczne istniały $\Delta=0$. Zatem rozwiązujemy równanie $-84m^2-80m=0$.

$-m(84m+80)=0$

$m=0$ lub $84m+80=0$

$84m=-80$

$m=-\frac{80}{84}$

$m=0$ lub $m=-\frac{20}{21}$

Styczne do okręgu $x^2+y^2-10x+4y+25=0$ opisują równania: $y=0$ i $y=-\frac{20}{21}x$.

Schemat oceniania I sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania .... 1 pkt

Zapisanie układu równań $\begin{cases} y = mx \\ x^2 + y^2 - 10x + 4y + 25 = 0 \end{cases}$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 pkt

Zapisanie równania kwadratowego z jedną niewiadomą $x^2(m^2+1) - x(10-4m) + 25 = 0$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 pkt

Zapisanie warunku istnienia stycznych: $-84m^2 - 80m = 0$ lub $\Delta = 0$.

Rozwiązanie pełne .... 4 pkt

Zapisanie równań prostych stycznych: $y = 0$ i $y = -\frac{20}{21}x$.

II sposób rozwiązania

Proste styczne do okręgu $x^2 + y^2 - 10x + 4y + 25 = 0$, przechodzące przez początek układu współrzędnych, mają równanie postaci $y = mx$.

Wyznaczamy współrzędne środka $S = (a, b)$ okręgu i długość jego promienia *r*:

$x^2 - 10x + 25 + y^2 + 4y + 4 = -25 + 25 + 4$,

$(x-5)^2 + (y+2)^2 = 4$.

Zatem $S = (5, -2)$ i $r = 2$.

Odległość środka okręgu *S* od stycznej $y = mx$ jest równa długości promienia okręgu. Obliczamy odległość punktu *S* od prostej $mx - y = 0$.

$$\frac{|m \cdot 5 - 1 \cdot (-2)|}{\sqrt{m^2+1}} = 2.$$

Stąd $|5m+2| = 2\sqrt{m^2+1}$. Zatem $(5m+1)^2 = 4(m^2+1)$.

Po przekształceniach otrzymujemy $21m^2 + 20m = 0$, skąd $m(21m + 20) = 0)$.

Zatem $m = 0$ lub $m = -\frac{21}{20}$.

Styczne do okręgu $x^2 + y^2 - 10x + 4y + 25 = 0$ opisują równania: $y = 0$ i $y = -\frac{20}{21}x$.

Schemat oceniania II sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania .... 1 pkt

Wyznaczenie współrzędnych środka $S = (a, b)$ okręgu i długości jego promienia *r*:

$S = (5, -2)$ i $r = 2$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ....2 pkt

Zapisanie odległości środka okręgu od prostych stycznych do niego: $\frac{|m\cdot 5-1\cdot(-2)|}{\sqrt{m^2+1}}=2$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania..3 pkt

Przekształcenie równania $\frac{|m\cdot 5-1\cdot(-2)|}{\sqrt{m^2+1}}=2$ do postaci równania kwadratowego: $21m^2+20m=0$ lub $m(21m+20)=0)$.

Rozwiązanie pełne ....4 pkt

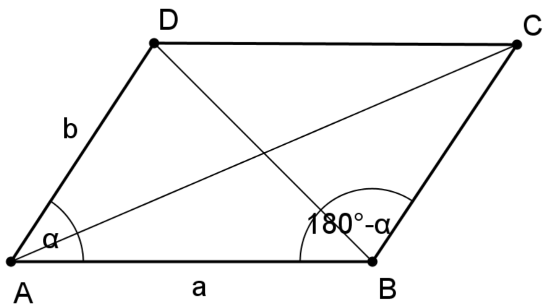
Rozwiązanie równania $21m^2+20m=0$ i zapisanie równań prostych stycznych do okręgu: $y=0$ i $y=-\frac{20}{21}x$.

Zadanie 6. (*4 pkt*)

Wykaż, że w dowolnym równoległoboku suma kwadratów długości przekątnych jest równa sumie kwadratów długości wszystkich boków.

__I sposób rozwiązania__

Wykonujemy rysunek i wprowadzamy oznaczenia



Z twierdzenia cosinusów w trójkącie *ABD* otrzymujemy

$|BD|^2=a^2+b^2-2ab\cos\alpha$

Z twierdzenia cosinusów w trójkącie *ABC* otrzymujemy

$|AC|^2=a^2+b^2-2ab\cos(180°-\alpha)=a^2+b^2+2ab\cos\alpha$

Dodając te równości stronami otrzymujemy

$|BD|^2+|AC|^2=a^2+b^2-2ab\cos\alpha+a^2+b^2+2ab\cos\alpha=2a^2+2b^2=2(a^2+b^2)$.

Zatem $|BD|^2+|AC|^2=2(a^2+b^2)$.

__Schemat oceniania I sposobu rozwiązania__

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania...1 pkt

- zapisanie zależności wynikającej z twierdzenia cosinusów dla trójkąta *ABD*: $|BD|^2=a^2+b^2-2ab\cos\alpha$

albo

- zapisanie zależności wynikającej z twierdzenia cosinusów dla trójkąta ABC: $|AC|^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(180° - \alpha) = a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha$.

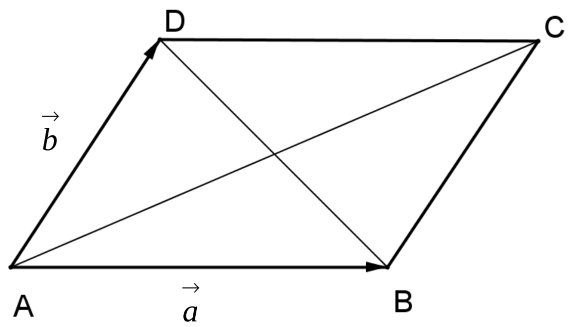
Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 pkt
Zapisanie zależności wynikającej z twierdzenia cosinusów dla trójkąta ABD i trójkąta ABC: $|BD|^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha$ i $|AC|^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(180° - \alpha) = a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 pkt
Zapisanie sumy kwadratów długości sumy przekątnych
$|BD|^2 + |AC|^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha + a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha$.

Rozwiązanie pełne .... 4 pkt
Wykazanie, że $|BD|^2 + |AC|^2 = 2(a^2 + b^2)$.

<u>**II sposób rozwiązania**</u> (rachunek wektorów)
Wykonujemy rysunek i wprowadzamy oznaczenia:

$\vec{AB} = \vec{a}$
$\vec{AD} = \vec{b}$



Korzystając z rachunku wektorowego otrzymujemy
$\vec{AC} = \vec{a} + \vec{b}$
$\vec{BD} = \vec{b} - \vec{a}$
Stąd

$$|AC|^2 + |BD|^2 = \left|\vec{AC}\right|^2 + \left|\vec{BD}\right|^2 = \left(\vec{a} + \vec{b}\right)^2 + \left(\vec{b} - \vec{a}\right)^2 =$$

$$= 2\left(\left|\vec{a}\right|^2 + \left|\vec{b}\right|^2\right) + 2\left(\vec{a} \circ \vec{b}\right) - 2\left(\vec{b} \circ \vec{a}\right) = 2\left(|AB|^2 + |AD|^2\right).$$

Zatem $|AC|^2 + |BD|^2 = 2\left(|AB|^2 + |AD|^2\right)$.

<u>**Schemat oceniania I sposobu rozwiązania**</u>
Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania .... 1 pkt

- zapisanie zależności wynikającej z rachunku wektorowego dla wektora $\vec{AC}$: $\vec{AC} = \vec{a} + \vec{b}$

albo

- zapisanie zależności wynikającej z rachunku wektorowego dla wektora $\vec{BD}$: $\vec{BD} = \vec{b} - \vec{a}$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 pkt

Zapisanie zależności wynikającej z rachunku wektorowego dla wektorów $\vec{AC}$ i $\vec{BD}$: $\vec{AC} = \vec{a} + \vec{b}$ i $\vec{BD} = \vec{b} - \vec{a}$.

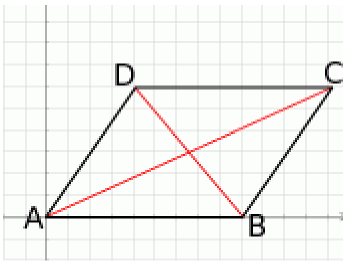
Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 pkt
Zapisanie sumy kwadratów długości sumy przekątnych z wykorzystaniem iloczynu skalarnego

$$|AC|^2 + |BD|^2 = \left|\vec{AC}\right|^2 + \left|\vec{BD}\right|^2 = \left(a^2+b^2\right)^2 + \left(b^2-a^2\right)^2 == 2\left(\left|\vec{a}\right|^2 + \left|\vec{b}\right|^2\right) + 2\left(\vec{a} \circ \vec{b}\right) - 2\left(\vec{b} \circ \vec{a}\right)$$

Rozwiązanie pełne .... 4 pkt

Wykazanie równości: $|AC|^2 + |BD|^2 = 2\left(|AB|^2 + |AD|^2\right)$.

<u>III sposób rozwiązania</u>
Umieszczamy równoległobok w układzie współrzędnych w taki sposób, by $A = (0,0)$, $B = (1,0)$, $C = (1+a,b)$, $D = (a,b)$.



Kwadraty długości ramion są równe $|AB|^2 = 1$ i $|AD|^2 = a^2 + b^2$.
Suma kwadratów przekątnych jest równa

$$|AC|^2 + |BD|^2 = (1+a)^2 + b^2 + (a-1)^2 + b^2 = 1 + 2a + a^2 + a^2 - 2a + 1 + 2b^2 =$$
$$= 2a^2 + 2b^2 + 2 = 2\left(1 + a^2 + b^2\right) = 2\left(|AB|^2 + |AD|^2\right).$$

Zatem $|AC|^2 + |BD|^2 = 2\left(|AB|^2 + |AD|^2\right)$.

<u>Schemat oceniania III sposobu oceniania</u>
Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania .... 1 pkt
Umieszczenie równoległoboku w układzie współrzędnych i przyporządkowanie wierzchołkom współrzędnych: np. $A = (0,0)$, $B = (1,0)$, $C = (1+a,b)$, $D = (a,b)$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 pkt
Zapisanie kwadratów długości boków AB i AD: $|AB|^2 = 1$ i $|AD|^2 = a^2 + b^2$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 pkt
Zapisanie sumy kwadratów długości przekątnych i wykorzystanie wzorów skróconego mnożenia do przekształcenie wyrażenia :
$|AC|^2+|BD|^2=(1+a)^2+b^2+(a-1)^2+b^2=1+2a+a^2+a^2-2a+1+2b^2$.

Rozwiązanie pełne .... 4 pkt
Wykazanie równości: $|AC|^2+|BD|^2=2a^2+2b^2+2=2\left(1+a^2+b^2\right)=2\left(|AB|^2+|AD|^2\right)$.

Zadanie 7. (*4 pkt*)

Oblicz wartość funkcji $f(x)=\left|1-2^{x-3}\right|$ dla argumentu $x=3\log_{0,4}2-\log_{0,4}3\cdot\log_3 125$.

<u>I sposób rozwiązania</u>

Obliczamy wartość liczby x.

$$x=3\log_{0,4}2-\log_{0,4}3\cdot\log_3 125=\log_{0,4}8-\log_{0,4}3\cdot\log_3 125=\frac{\log_3 8}{\log_3 0,4}-\frac{\log_3 3}{\log_3 0,4}\cdot\log_3 125=$$
$$=\frac{\log_3 8}{\log_3 0,4}-\frac{1}{\log_3 0,4}\cdot\log_3 125=\frac{\log_3 8-\log_3 125}{\log_3 0,4}=\frac{\log_3 0,064}{\log_3 0,4}=\frac{\log_3(0,4)^3}{\log_3 0,4}=\frac{3\log_3 0,4}{\log_3 0,4}=3$$

Zatem $x=3$.
Obliczamy wartość funkcji $f(x)=\left|1-2^{x-3}\right|$ dla $x=3$: $f(3)=\left|1-2^{3-3}\right|=0$.

<u>Schemat oceniania I sposobu rozwiązania</u>
Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania .... 1 pkt
Wykorzystanie wzoru na potęgę wyrażenia logarytmowanego i zamianę podstawy logarytmu przy przekształceniu wszystkich logarytmów do logarytmów o podstawie 3:
$$x=3\log_{0,4}2-\log_{0,4}3\cdot\log_3 125=\log_{0,4}8-\log_{0,4}3\cdot\log_3 125=\frac{\log_3 8}{\log_3 0,4}-\frac{\log_3 3}{\log_3 0,4}\cdot\log_3 125.$$

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 pkt
Wykonanie działań na logarytmach i przekształcenie wyrażenia do postaci:
$$x=3\log_{0,4}2-\log_{0,4}3\cdot\log_3 125=\frac{\log_3(0,4)^3}{\log_3 0,4}.$$

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 pkt
Obliczenie wartości x: $x=3$.

Rozwiązanie pełne .... 4 pkt
Obliczenie wartości funkcji $f(x)=\left|1-2^{x-3}\right|$ dla $x=3$: $f(3)=\left|1-2^{3-3}\right|=0$.

<u>II sposób rozwiązania</u>
Obliczamy wartość liczby x.

$$x = 3\log_{0,4} 2 - \log_{0,4} 3 \cdot \log_3 125 = \log_{0,4} 8 - \log_{0,4} 3 \cdot \log_3 125 = \log_{0,4} 8 - \log_{0,4} 3 \cdot \frac{\log_{0,4} 125}{\log_{0,4} 3} =$$

$$= \log_{0,4} 8 - \log_{0,4} 3 \cdot \frac{\log_{0,4} 125}{\log_{0,4} 3} = \log_{0,4} - \log_{0,4} 125 = \log_{0,4} \frac{8}{125} = 3$$

Zatem $x = 3$.
Obliczamy wartość funkcji $f(x) = \left|1 - 2^{x-3}\right|$ dla $x = 3$: $f(3) = \left|1 - 2^{3-3}\right| = 0$.

<u>Schemat oceniania II sposobu rozwiązania</u>
Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania...1 pkt
Wykorzystanie wzoru na potęgę wyrażenia logarytmowanego i zamianę podstawy logarytmu przy przekształceniu wszystkich logarytmów do logarytmów o podstawie 0,4:

$$x = 3\log_{0,4} 2 - \log_{0,4} 3 \cdot \log_3 125 = \log_{0,4} 8 - \log_{0,4} 3 \cdot \log_3 125 = \log_{0,4} 8 - \log_{0,4} 3 \cdot \frac{\log_{0,4} 125}{\log_{0,4} 3}.$$

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp...2 pkt
Wykonanie działań na logarytmach i przekształcenie wyrażenia do postaci:

$$x = 3\log_{0,4} 2 - \log_{0,4} 3 \cdot \log_3 125 = \log_{0,4} \frac{8}{125}.$$

Pokonanie zasadniczych trudności zadania...3 pkt
Obliczenie wartości x: $x = 3$.

Rozwiązanie pełne...4 pkt
Obliczenie wartości funkcji $f(x) = \left|1 - 2^{x-3}\right|$ dla $x = 3$: $f(3) = \left|1 - 2^{3-3}\right| = 0$.

Zadanie 8. (*5 pkt*)
Wyznacz wszystkie wartości parametru *m*, dla których suma odwrotności pierwiastków równania $(2m+1)x^2 - (m+3)x + 2m + 1 = 0$ jest większa od 1.

<u>Rozwiązanie</u>
Wielomian $(2m+1)x^2 - (m+3)x + 2m + 1 = 0$ ma pierwiastki, jeżeli $2m + 1 \neq 0$ i $\Delta \geq 0$.

$2m + 1 \neq 0$

$m \neq -\frac{1}{2}$

$\Delta = b^2 - 4ac = [-(m+3)]^2 - 4(2m+1)(2m+1) = m^2 + 6m + 9 - 4(4m^2 + 4m + 1)$

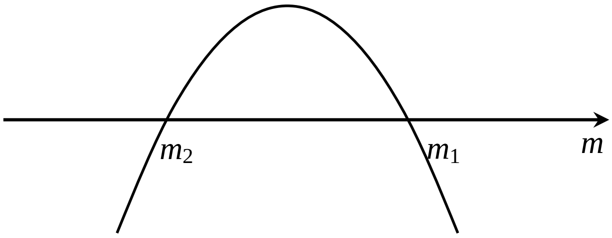
$\Delta = -15m^2 - 10m + 5$

Ponieważ $\Delta \geq 0$, więc $-15m^2 - 10m + 5 \geq 0$.

$\Delta_m = 100 - 4 \cdot (-15) \cdot 5 = 100 + 300 = 400$

$\sqrt{\Delta_m} = 20$

$$m_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta_m}}{2a_m} = \frac{10-20}{-30} = \frac{1}{3} \qquad m_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta_m}}{2a_m} = \frac{10+20}{-30} = -1$$



$$m \in \left\langle -1, \frac{1}{3} \right\rangle$$

Pierwiastki wielomianu $(2m+1)x^2 - (m+3)x + 2m + 1 = 0$ istnieją dla
$m \in \left\langle -1, -\frac{1}{2} \right) \cup \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{3} \right\rangle$.

Wyznaczamy sumę odwrotności pierwiastków wielomianu $(2m+1)x^2 - (m+3)x + 2m + 1 = 0$ korzystając ze wzorów Viete`a

$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \frac{m+3}{2m+1}$.

Wyznaczamy wartości parametru *m*, dla których pierwiastki wielomianu $(2m+1)x^2 - (m+3)x + 2m + 1 = 0$ spełniają warunek $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} > 1$

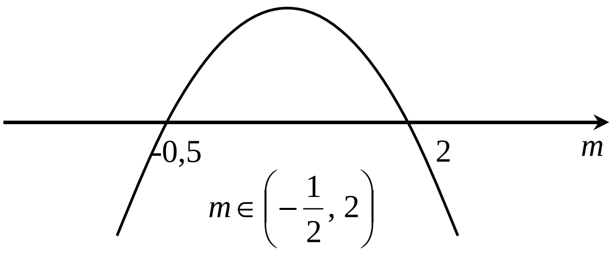
$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} > 1$$

$$\frac{m+3}{2m+1} > 1$$

$$\frac{m+3}{2m+1} - \frac{2m+1}{2m+1} > 0$$

$$\frac{-m+2}{2m+1} > 0$$

$$(-m+2)(2m+1) > 0$$



$$m \in \left(-\frac{1}{2}, 2 \right)$$

Zatem $m \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{3} \right\rangle$.

<u>Schemat oceniania</u>

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania .... 1 pkt

Zapisanie warunków istnienia pierwiastków równania $(2m+1)x^2-(m+3)x+2m+1=0$ i warunku wynikającego z treści zadania: $2m+1\neq 0$, $\Delta\geq 0$, $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}>1$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 pkt

Doprowadzenie do postaci nierówności kwadratowej $-15m^2-10m+5\geq 0$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 pkt

Rozwiązanie nierówności $-15m^2-10m+5\geq 0$ i równania $2m+1\neq 0$:

$m\in\left\langle -1,-\frac{1}{2}\right)\cup\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right\rangle$.

Rozwiązanie zadania do końca, lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) .... 4 pkt

Rozwiązanie nierówności $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}>1$: $m\in\left(-\frac{1}{2},2\right)$.

Rozwiązanie pełne .... 5 pkt

Wyznaczenie części wspólnej rozwiązań nierówności i podanie odpowiedzi: $m\in\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right\rangle$.

<u>Uwagi</u>

1. Jeżeli zdający rozwiąże nierówność $\Delta>0$, to przyznajemy za całe zadanie maksymalnie **4 punkty**.
2. Jeżeli zdający nie uwzględni warunku $2m+1\neq 0$, to za całe zadanie przyznajemy **0 punktów.**

Zadanie 9. (*4 pkt*)

Ciąg (a,b,c) jest ciągiem arytmetycznym. Suma jego wyrazów jest równa 18. Jeżeli pierwszą z liczb zmniejszymy o 25%, a trzecią zwiększymy o 50%, to otrzymamy trzy kolejne wyrazu ciągu geometrycznego. Wyznacz liczby a,b,c.

<u>I sposób rozwiązania</u>

Ciąg (a,b,c) jest ciągiem arytmetycznym i $a+b+c=18$. Z własności ciągu arytmetycznego otrzymujemy $b=\frac{a+c}{2}$.

Ciąg $\left(a-\frac{1}{4}a,b,c+\frac{1}{2}c\right)$ jest ciągiem geometrycznym. Zatem $b^2=\frac{3}{4}a\cdot\frac{3}{2}c$.

Wyznaczamy liczby a,b,c rozwiązując układ równań

$$\begin{cases} a+b+c=18 \\ b=\dfrac{a+c}{2} \\ b^2=\dfrac{9}{8}ac \end{cases}$$

$$\begin{cases} a=18-b-c \\ b=\dfrac{18-b}{2} \\ b^2=\dfrac{9}{8}ac \end{cases}$$

$$\begin{cases} a=18-b-c \\ b=6 \\ b^2=\dfrac{9}{8}ac \end{cases}$$

$$\begin{cases} a=12-c \\ b=6 \\ 36=\dfrac{9}{8}(12-c)c \end{cases}$$

$$\begin{cases} a=12-c \\ b=6 \\ c^2-12c+32=0 \end{cases}$$

Rozwiązaniem równania kwadratowego $c^2-12c+32=0$ jest $c=4$ lub $c=8$.

Zatem $\begin{cases} a=8 \\ b=6 \\ c=4 \end{cases}$ lub $\begin{cases} a=4 \\ b=6 \\ c=8 \end{cases}$.

<u>Schemat oceniania do I sposobu rozwiązania</u>

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania .... 1 pkt

Wykorzystanie własności ciągu arytmetycznego (geometrycznego) i zapisanie odpowiedniego równania, np.

- $2b=a+c$

albo

- $b^2=\dfrac{3}{4}a\cdot\dfrac{3}{2}c$.

Uwaga
Jeżeli zdający pomyli własności ciągu arytmetycznego z własnościami ciągu geometrycznego, to za całe rozwiązanie otrzymuje **0 punktów**.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ....2 pkt

Wykorzystanie własności obu ciągów (arytmetycznego i geometrycznego) i zapisanie układu równań umożliwiającego obliczenie liczb *a*, *b*, *c*, np.

$$\begin{cases} a+b+c=18 \\ b=\dfrac{a+c}{2} \\ b^2=\dfrac{9}{8}ac \end{cases}$$

Pokonanie zasadniczych trudności zadania ....3 pkt

- przekształcenie układu równań do równania kwadratowego z niewiadomą c, np. $c^2-12c+32=0$ i wyznaczenie jego rozwiązań: $c=4$, $c=8$

albo

- przekształcenie układu równań do równania kwadratowego z niewiadomą a, np. $a^2-12a+32=0$ i wyznaczenie jego rozwiązań: $a=4$, $a=8$

albo

- poprawne rozwiązanie równania kwadratowego, odrzucenie jednego z rozwiązań i poprawne wyznaczenie tylko jednej trójki liczb

albo

- przekształcenie układu równań z jedną niewiadomą do równania kwadratowego z błędem rachunkowym, np. błąd w redukcji wyrazów podobnych lub w przepisywaniu i konsekwentne doprowadzenie rozwiązania do końca (o ile otrzymane równanie kwadratowe ma dwa pierwiastki rzeczywiste).

Uwaga
Jeżeli w trakcie doprowadzania układu równań do równania kwadratowego zdający popełni błąd, w wyniku którego otrzyma równanie mające mniej niż dwa rozwiązania, to otrzymuje **2 punkty** za całe zadanie.

Rozwiązanie pełne ....4 pkt

Wyznaczenie szukanych liczb: $a=4,\ b=6,\ c=8$ lub $a=8,\ b=6,\ c=4$.

Uwaga
Jeżeli zdający poprawnie rozwiąże układ równań i popełni błąd w zredagowaniu odpowiedzi, na przykład: $a=4$ lub $a=8$, $b=6$, $c=4$ lub $c=8$, to otrzymuje **3 punkty**.

II sposób rozwiązania

Oznaczamy: przez a – pierwszy wyraz ciągu arytmetycznego, a przez r – różnicę tego ciągu. Wówczas $b=a+r,\ c=a+2r$.

Wtedy $3a+3r=18$, czyli $a+r=6$.

Z własności ciągu geometrycznego zapisujemy równanie, np. $(a+r)^2=\frac{9}{8}a(a+2r)$, a następnie zapisujemy układ równań: $\begin{cases} a+r=6 \\ (a+r)^2 = \frac{9}{8}a(a+2r) \end{cases}$.

Z pierwszego równania wyznaczamy $a = 6 - r$ i podstawiamy do drugiego równania. Otrzymujemy równanie kwadratowe z niewiadomą *r*: $(6-r+r)^2 = \frac{9}{8}(6-r)(6-r+2r)$ lub $r^2 - 4 = 0$.

Rozwiązując równanie, otrzymujemy dwa rozwiązania: $r_1 = 2$, $r_2 = -2$.

Następnie obliczamy *a*, *b*, *c*.

Szukanymi liczbami są: $\begin{cases} a=4 \\ b=6 \\ c=8 \end{cases}$ lub $\begin{cases} a=8 \\ b=6 \\ c=4 \end{cases}$.

<u>Schemat oceniania II sposobu rozwiązania</u>

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania .... 1 pkt

Wprowadzenie oznaczeń: *a* - pierwszy wyraz ciągu arytmetycznego, a *r* – różnica tego ciągu oraz wykorzystanie definicji ciągu arytmetycznego do zapisania odpowiedniego równania, np. $3a + 3r = 18$ lub $a + r = 6$.

<u>Uwaga</u>

Jeżeli zdający pomyli własności ciągu arytmetycznego z własnościami ciągu geometrycznego, to za całe rozwiązanie otrzymuje **0 punktów**.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 pkt

Wykorzystanie własności obu ciągów (arytmetycznego i geometrycznego) i zapisanie układu równań umożliwiającego obliczenie liczb *a*, *b*, *c*, np.

$$\begin{cases} a+r=6 \\ (a+r)^2 = \frac{9}{8}a(a+2r) \end{cases}$$

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 pkt

- przekształcenie układu równań do równania kwadratowego z niewiadomą *r*, np. $(6-r+r)^2 = \frac{9}{8}(6-r)(6-r+2r)$ lub $r^2 - 4 = 0$ i wyznaczenie jego rozwiązań: $r_1 = 2$, $r_2 = -2$

albo

- poprawne rozwiązanie równania kwadratowego: $r_1 = 2$, $r_2 = -2$; odrzucenie jednego z rozwiązań, np. $r < 0$ i poprawne wyznaczenie tylko jednej trójki liczb

albo

- przekształcenie układu równań z jedną niewiadomą do równania kwadratowego z błędem rachunkowym, np. błąd w redukcji wyrazów podobnych lub w przepisywaniu i konsekwentne doprowadzenie rozwiązania do końca (o ile otrzymane równanie kwadratowe ma dwa pierwiastki rzeczywiste).

Uwaga
Jeżeli w trakcie doprowadzania układu równań do równania kwadratowego zdający popełni błąd, w wyniku którego otrzyma równanie mające mniej niż dwa rozwiązania, to otrzymuje **2 punkty** za całe zadanie.

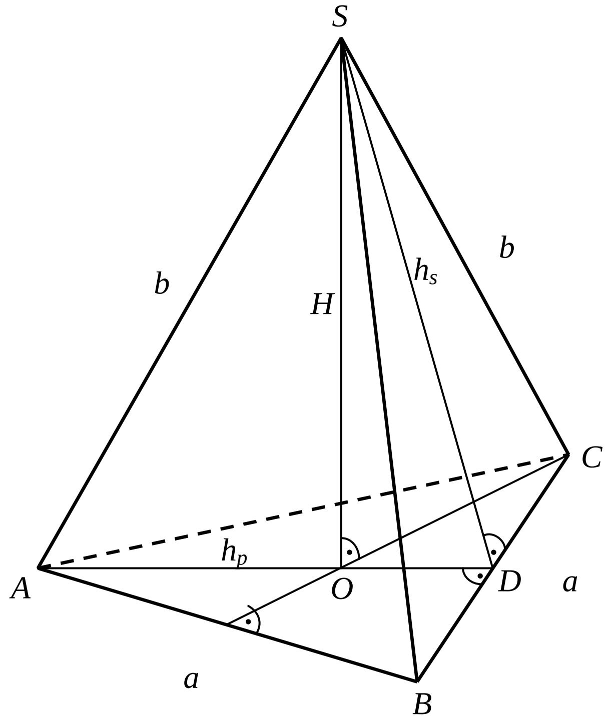
Rozwiązanie pełne ....4 pkt
Wyznaczenie szukanych liczb: $a=4,\ b=6,\ c=8$ lub $a=8,\ b=6,\ c=4$.

Uwaga
Jeżeli zdający poprawnie rozwiąże układ równań i popełni błąd w zredagowaniu odpowiedzi, np.: $a=4$ lub $a=8$, $b=6$, $c=4$ lub $c=8$, to otrzymuje **3 punkty.**

Zadanie 10. (*4 pkt*)
Krawędź podstawy ostrosłupa trójkątnego prawidłowego jest równa 6. Jego objętość jest równa $9\sqrt{3}$. Wyznacz długość wysokości ściany bocznej ostrosłupa.

Rozwiązanie

Rysujemy ostrosłup prawidłowy trójkątny i wprowadzamy oznaczenia.



Z treści zadania wynika, że $a=6$ i $V=9\sqrt{3}$.
Ponieważ objętość ostrosłupa prawidłowego trójkątnego wyraża się wzorem $V=\frac{1}{3}\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot H$, więc $\frac{1}{3}\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot H=9\sqrt{3}$.
Przekształcamy równanie i obliczamy długość wysokości ostrosłupa *H*: $H=3$.

Wysokość w trójkącie równobocznym, który jest podstawa ostrosłupa jest równa $h_p = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Zatem wysokość podstawy ma długość $h_p = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Wykorzystując twierdzenie Pitagorasa do boków trójkąta *SOD*, obliczamy wysokość h_s ściany bocznej: $H^2 + \left(\frac{1}{3}h_p\right)^2 = h_s{}^2$.

Stąd $h_s{}^2 = 12$. Zatem $h_s = 2\sqrt{3}$.

Wysokość ściany bocznej ostrosłupa ma długość $h_s = 2\sqrt{3}$.

<u>**Schemat oceniania**</u>

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania .... 1 pkt
Wykonanie rysunku ostrosłupa oraz zaznaczenie wysokości ściany bocznej i wysokości podstawy ostrosłupa.
<u>**Uwaga**</u>
Nie wymagamy rysunku, jeżeli z dalszych obliczeń wynika, że zdający poprawnie interpretuje treść zadania.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 pkt
Zapisanie równania $\frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot H = 9\sqrt{3}$ i obliczenie długości wysokości ostrosłupa: $H = 3$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 pkt
Zapisanie zależności umożliwiającej wyznaczenie długości wysokości ściany bocznej ostrosłupa, np. $H^2 + \left(\frac{1}{3}h_p\right)^2 = h_s{}^2$.

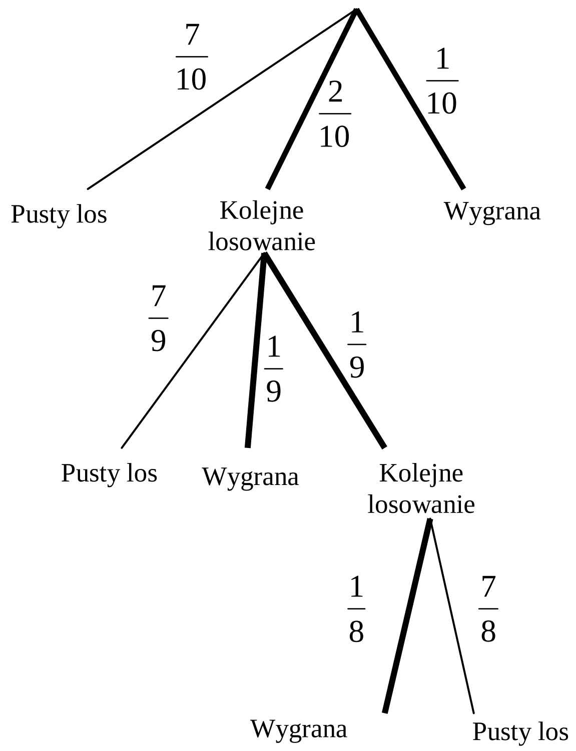
Rozwiązanie pełne .... 4 pkt
Obliczenie długości wysokości h_s ściany bocznej ostrosłupa: $h_s = 2\sqrt{3}$.

<u>**Uwaga**</u>
Oceniamy na **3 punkty** również rozwiązanie zadania do końca z błędami nieprzekreślającymi poprawności rozwiązania, np. błędy rachunkowe.

Zadanie 11. (*4 pkt*)

Wśród dziesięciu losów loteryjnych znajduje się jeden los z główną wygraną oraz dwa losy uprawniające do wylosowania następnego losu. Oblicz prawdopodobieństwo wygrania przy zakupie jednego losu.

<u>**Rozwiązanie**</u>
Rysujemy drzewo dla danego doświadczenia losowego. Opisujemy gałęzie drzewa odpowiednimi wartościami prawdopodobieństw. Pogrubione gałęzie ilustrują zdarzenie *A* opisane w treści zadania.



Prawdopodobieństwo tego zdarzenia jest równe

$$P(A)=\frac{1}{10}+\frac{2}{10}\cdot\frac{1}{9}+\frac{2}{10}\cdot\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{8}=\frac{1}{10}+\frac{2}{90}+\frac{1}{360}=\frac{45}{360}=\frac{1}{8}.$$

<u>Uwaga</u>
Możemy narysować drzewo „inteligentne” - pogrubione gałęzie na rysunku.

<u>Schemat oceniania</u>

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania.………………………………………………..………………....1 pkt
Zdający narysuje drzewo i na tym zakończy lub dalej rozwiązuje błędnie.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ……………………………………………..2 pkt
Zdający narysuje drzewo, zapisze prawdopodobieństwa na jego gałęziach i na tym zakończy lub dalej rozwiązuje błędnie.

<u>Uwagi</u>
Oceniamy rozwiązanie na **0 punktów**, gdy w dalszej części rozwiązania zdający doda prawdopodobieństwa wzdłuż gałęzi zamiast mnożyć albo mnoży otrzymane iloczyny zamiast dodawać.

- Dopuszcza się błąd w zapisaniu prawdopodobieństwa na jednej gałęzi drzewa (traktujemy jako błąd nieuwagi).
- Jeżeli zdający opisze prawdopodobieństwa <u>tylko na istotnych gałęziach</u>, to kwalifikujemy to do kategorii **„pokonanie zasadniczych trudności zadania”.**
- Jeżeli zdający narysuje „inteligentne drzewo” i opisze prawdopodobieństwa na jego gałęziach, to kwalifikujemy rozwiązanie do kategorii **„pokonanie zasadniczych trudności zadania”.**
- Jeżeli rozwiązujący popełni błąd rachunkowy lub nieuwagi i na tym zakończy, to otrzymuje **2 punkty**.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 pkt

- Zdający wskaże na drzewie właściwe gałęzie (np. pogrubienie gałęzi lub zapisanie prawdopodobieństw <u>tylko na istotnych gałęziach</u>).
- Jeżeli zdający nie wskaże na drzewie odpowiednich gałęzi, ale z dalszych obliczeń można wywnioskować, że wybiera właściwe gałęzie.

Rozwiązanie pełne .... 4 pkt

Obliczenie prawdopodobieństwa: $P(A)=\frac{1}{8}$.

<u>Uwaga</u>

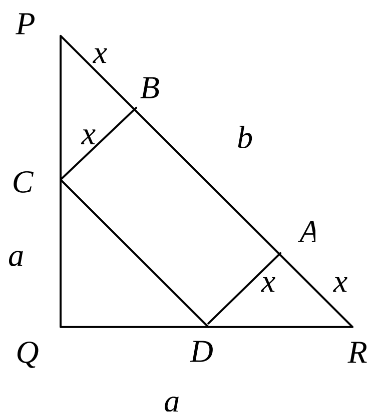
Jeżeli zdający wyznaczy $P(A)>1$ lub $P(A)<0$, to przyznajemy **0 punktów** za całe zadanie.

Zadanie 12. (*5 pkt*)

Dany jest równoramienny trójkąt prostokątny, którego przeciwprostokątna ma długość 2. Bok *AB* prostokąta *ABCD* zawiera się w przeciwprostokątnej tego trójkąta, zaś punkty *C* i *D* należą do przyprostokątnych. Oblicz długości boków prostokąta *ABCD* wiedząc, że kwadrat długości jego przekątnej *AC* ma wartość najmniejszą z możliwych.

<u>Rozwiązanie</u>

Rysujemy trójkąt prostokątny oraz prostokąt *ABCD.*
Wprowadzamy oznaczenia boków w trójkącie:
a – przyprostokątne trójkąta,
b – przeciwprostokątna.



Przeciwprostokątna trójkąta ma długość $b=2$.

Przeciwprostokątna b jest równa $b=|AB|+2x$. Bok prostokąta AB opisuje zależność $|AB|=2-2x$, gdzie $x\in(0,1)$.

Korzystając z twierdzenia Pitagorasa kwadrat długości przekątnej AC możemy opisać funkcją: $f(x)=x^2+(2-2x)^2$. Stosując wzór skróconego mnożenia, przekształcamy wzór funkcji f do postaci $f(x)=5x^2-8x+4$.

Otrzymana funkcja jest funkcją kwadratową, której ramiona paraboli skierowane są ku górze, więc najmniejszą wartość przyjmuje dla $x_w=-\frac{b}{2a}=\frac{8}{10}=\frac{4}{5}$.

Zatem prostokąt *ABCD* ma boki długości: $|AD|=|BC|=\frac{4}{5}$ i $|AB|=|CD|=2-\frac{8}{5}=\frac{2}{5}$.

<u>Schemat oceniania</u>

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania .... 1 pkt
Zauważenie, że trójkąty *PQR*, *CBP*, *RAD* są trójkątami prostokątnymi równoramiennymi.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 pkt
Zapisanie zależności opisującej długość boku AB: $|AB|=2-2x$, gdzie $x\in(0,1)$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 pkt
Zapisanie kwadratu długości przekątnej *AC* w postaci trójmianu kwadratowego:
$f(x)=5x^2-8x+4$.

Rozwiązanie zadania do końca, lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) .... 4 pkt
Wyznaczenie *x*, dla którego $f(x)=5x^2-8x+4$ przyjmuje wartość najmniejszą: $x=\frac{4}{5}$.

Rozwiązanie pełne .... 5 pkt
Wyznaczenie długości boków prostokąta *ABCD*: $|AD|=|BC|=\frac{4}{5}$ i $|AB|=|CD|=\frac{2}{5}$.