



## **Materiały diagnostyczne z matematyki poziom podstawowy**

**czerwiec 2011**

### **Klucz odpowiedzi do zadań zamkniętych oraz schemat oceniania**

Materiały diagnostyczne przygotowała **Agata Siwik** we współpracy z nauczycielami matematyki szkół ponadgimnazjalnych:

**Ewa Ziętek**

Nauczyciel V Liceum Ogólnokształcącego im. Wspólnej Europy w Olsztynie  
Nauczyciel Technikum nr 6 w Zespole Szkół Elektronicznych i Telekomunikacyjnych w Olsztynie

**Irena Jakóbowska**

Nauczyciel VI Liceum Ogólnokształcącego im. G. Narutowicza w Olsztynie  
Wicedyrektor VI Liceum Ogólnokształcącego im. G. Narutowicza w Olsztynie

**Elżbieta Guziejko**

Nauczyciel Liceum Ogólnokształcącego im. Jana Kochanowskiego w Olecku

**Ewa Olszewska**

Nauczyciel Technikum w Zespole Szkół Handlowo-Ekonomicznych im. M. Kopernika w Białymstoku  
Dyrektor Liceum Ogólnokształcącego Wschodnioeuropejskiego Instytutu Gospodarki w Białymstoku

**Andrzej Gołota**

Nauczyciel Technikum w Zespole Szkół Mechanicznych w Elblągu  
Konsultant ds. matematyki Warmińsko-Mazurskiego Ośrodka Doskonalenia Nauczycieli w Elblągu

**Jan Żukowski**

Nauczyciel I Liceum Ogólnokształcące im. M. Konopnickiej w Suwałkach  
Doradca metodyczny Centrum Doskonalenia Nauczycieli i Kształcenia Ustawicznego w Suwałkach

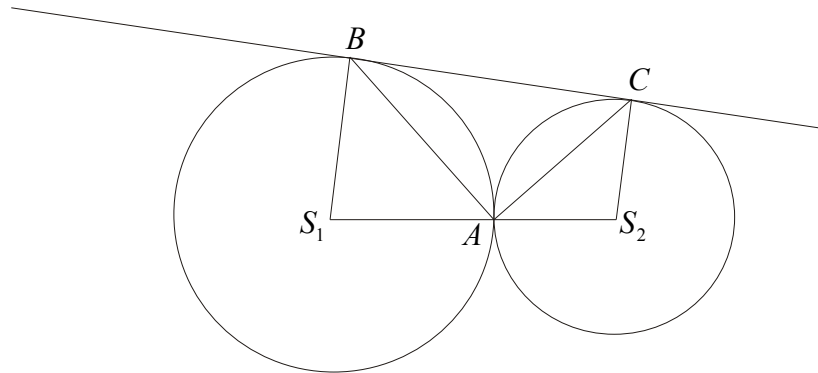
### Odpowiedzi do zadań zamkniętych

Nr zadania	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
odpowieź	A	A	D	C	B	B	B	C	C	C	A	B	B

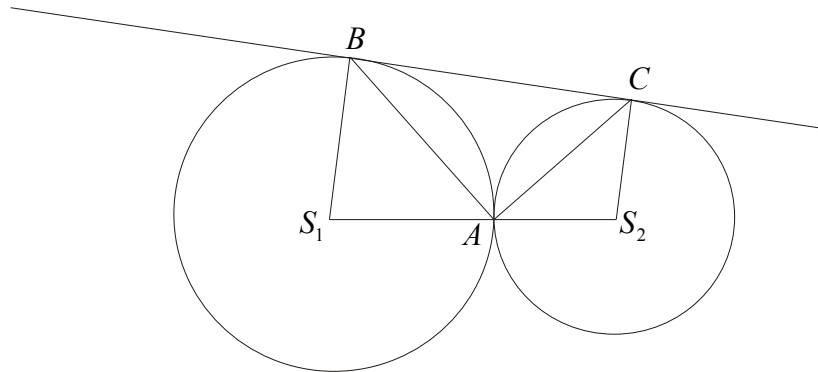
### Schemat punktowania zadań otwartych

#### **Zadanie 14. (2 pkt)**

Dwa okręgi o środkach  $S_1$  i  $S_2$  są styczne zewnętrznie w punkcie  $A$ . Poprowadzono prostą styczną do obu okręgów odpowiednio w punktach  $B$  i  $C$  (patrz rysunek). Wykaż, że kąt  $BAC$  jest prosty.



#### **I sposób rozwiązania**



Odcinki  $S_1B$  i  $S_2C$  są równoległe, bo styczna do obu okręgów jest prostopadła do promieni poprowadzonych do punktów styczności, stąd  $|\sphericalangle BS_1A| + |\sphericalangle AS_2C| = 180^\circ$ .

Miara kąta środkowego w okręgu jest dwukrotnie większa od miary kąta dopisanego opartego na tym samym łuku, więc  $|\sphericalangle CBA| = \frac{1}{2}|\sphericalangle BS_1A|$  oraz  $|\sphericalangle BCA| = \frac{1}{2}|\sphericalangle CS_2A|$  stąd wynika, że  $|\sphericalangle CBA| + |\sphericalangle BCA| = 90^\circ$ .

Suma miar kątów wewnętrznych trójkąta jest równa  $180^\circ$ , zatem  $|\sphericalangle BAC| = 90^\circ$ .

### Schemat oceniania I sposób rozwiązania

Zdający otrzymuje .....1 punkt

gdy:

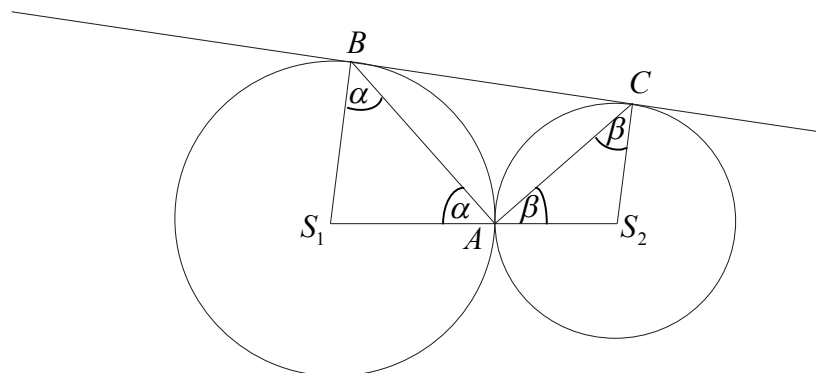
- zauważy, że odcinki  $S_1B$  i  $S_2C$  są równoległe oraz wykorzysta twierdzenie, że miara kąta środkowego w okręgu jest dwukrotnie większa od miary kąta dopisanego opartego na tym samym łuku. Wystarczy, że zapisze np.:  $|\sphericalangle BS_1A| + |\sphericalangle AS_2C| = 180^\circ$  i  $|\sphericalangle CBA| = \frac{1}{2}|\sphericalangle BS_1A|$  oraz  $|\sphericalangle BCA| = \frac{1}{2}|\sphericalangle CS_2A|$ .

Zdający otrzymuje .....2 punkty

gdy:

- przeprowadzi pełne rozumowanie np.: zapisze że,  $|\sphericalangle CBA| + |\sphericalangle BCA| = 90^\circ$ , więc  $|\sphericalangle BAC| = 90^\circ$ .

### II sposób rozwiązania



Trójkąty  $BS_1A$  i  $CS_2A$  są równoramienne. Zatem  $|\sphericalangle S_1BA| = |\sphericalangle S_1AB| = \alpha$  oraz  $|\sphericalangle CAS_2| = |\sphericalangle ACS_2| = \beta$ .

Odcinki  $S_1B$  i  $S_2C$  są prostopadłe do stycznej, stąd  $|\sphericalangle ABC| = 90^\circ - \alpha$ ,  $|\sphericalangle BCA| = 90^\circ - \beta$ .

Niech  $|\sphericalangle BAC| = \gamma$ .

Kąty  $ABC$ ,  $BCA$  i  $BAC$  są kątami wewnętrznymi trójkąta  $BAC$ , więc  $90^\circ - \alpha + 90^\circ - \beta + \gamma = 180^\circ$ , stąd  $\alpha + \beta = \gamma$ .

Kąt  $S_1AS_2$  jest półpełny, więc  $|\sphericalangle S_1AS_2| = 180^\circ = \alpha + \gamma + \beta$ , stąd  $2\gamma = 180^\circ$  czyli  $\gamma = |\sphericalangle BAC| = 90^\circ$ .

### Schemat oceniania II sposób rozwiązania

Zdający otrzymuje .....1 punkt

gdy:

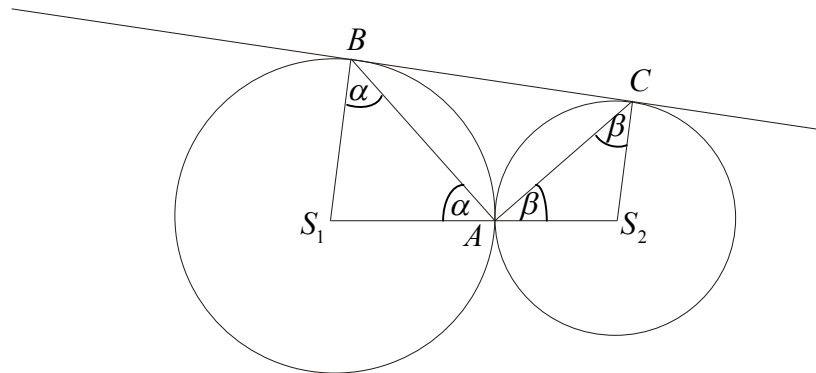
- zauważy, że odcinki  $S_1B$  i  $S_2C$  są prostopadłe do stycznej, trójkąty  $BS_1A$  i  $CS_2A$  są równoramienne i zapisze zależność  $90^\circ - \alpha + 90^\circ - \beta + \gamma = 180^\circ$ .

Zdający otrzymuje .....2 punkty

gdy:

- zapisze, że  $|\sphericalangle S_1AS_2| = 180^\circ = \alpha + \gamma + \beta$  i obliczy miarę kąta  $BAC$ :  $|\sphericalangle BAC| = 90^\circ$ .

### III sposób rozwiązania



Trójkąty  $S_1AB$  i  $AS_2C$  są równoramienne. Zatem  $|\sphericalangle S_1AB| = |\sphericalangle S_1BA| = \alpha$  oraz  $|\sphericalangle S_2AC| = |\sphericalangle ACS_2| = \beta$ .

Kąty  $S_1AB$ ,  $S_1BA$ ,  $BS_1A$  są kątami wewnętrznymi trójkąta  $S_1AB$ , więc  $|\sphericalangle BS_1A| = 180^\circ - 2\alpha$ .

Czworokąt  $S_1S_2CB$  jest trapezem więc  $|\sphericalangle AS_2C| = 2\alpha$ .

Suma miar kątów trójkąta  $AS_2C$  jest równa:

$$|\sphericalangle AS_2C| + |\sphericalangle S_2AC| + |\sphericalangle ACS_2| = 2\alpha + \beta + \beta = 180^\circ, \text{ stąd } 2\alpha + 2\beta = 180^\circ, \text{ więc } \alpha + \beta = 90^\circ.$$

Kąt  $S_1AS_2$  jest półpełny więc  $|\sphericalangle BAC| + \alpha + \beta = 180^\circ$ , zatem  $|\sphericalangle BAC| = 90^\circ$ .

**Schemat oceniania III sposób rozwiązania**

**Zdający otrzymuje .....1 punkt**

**gdy:**

- zauważy, że trójkąty  $S_1AB$  i  $AS_2C$  są równoramienne, zapisze  $|\sphericalangle S_1AB| = |\sphericalangle S_1BA|$  i  $|\sphericalangle S_2AC| = |\sphericalangle ACS_2|$  i  $|\sphericalangle BS_1A| = 180^\circ - 2\alpha$  oraz zauważy, że czworokąt  $S_1S_2CB$  jest trapezem więc  $|\sphericalangle AS_2C| = 2\alpha$ .

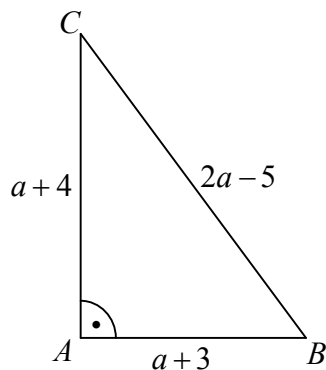
**Zdający otrzymuje .....2 punkty**

**gdy:**

- zapisze, że suma kątów trójkąta  $AS_2C$  jest równa:  $2\alpha + 2\beta = 180^\circ$ , więc  $\alpha + \beta = 90^\circ$  i kąt  $S_1AS_2$  jest półpełny więc, zatem  $|\sphericalangle BAC| = 90^\circ$ .

**Zadanie 15. (2 pkt)**

Trójkąt  $ABC$  jest prostokątny. W trójkącie tym miara kąta  $BAC$  jest równa  $90^\circ$ ,  $|AB| = a + 3$ ,  $|AC| = a + 4$ ,  $|BC| = 2a - 5$ . Oblicz długości boków tego trójkąta.

**Rozwiązanie**

Z twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy równanie

$$(a+3)^2 + (a+4)^2 = (2a-5)^2 \text{ i } a > 2,5$$

Po przekształceniach otrzymujemy równanie

$$2a^2 - 34a = 0.$$

Wtedy  $a_1 = 0$  (sprzeczne z założeniem) oraz  $a_2 = 17$ .

Obliczamy długości boków tego trójkąta:  $|AB| = 20$ ,  $|AC| = 21$ ,  $|BC| = 29$ .

**Schemat oceniania**

Zdający otrzymuje .....1 punkt

gdy:

- rozwiąże równanie  $(a+3)^2 + (a+4)^2 = (2a-5)^2$ :  $a = 17$  i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

Zdający otrzymuje .....2 punkty

gdy:

- obliczy długości boków  $|AB| = 20$ ,  $|AC| = 21$ ,  $|BC| = 29$ .

**Uwagi**

- Jeżeli zdający popełni błąd rachunkowy przy rozwiązywaniu równania kwadratowego i konsekwentnie do popełnionego błędu obliczy długości boków tego trójkąta, to za całe rozwiązanie otrzymuje **1 punkt**.
- Jeżeli zdający błędnie zapisze równanie kwadratowe, to za całe zadanie otrzymuje **0 punktów**.

**Zadanie 16. (2 pkt)**

Zbadaj, czy istnieje taki kąt ostry  $\alpha$ , dla którego  $\cos \alpha = \frac{2\sqrt{6}}{7}$  i  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}$ . Odpowiedź uzasadnij.

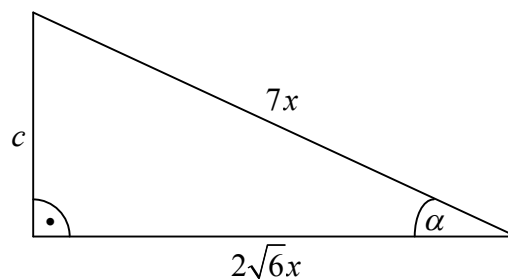
**I sposób rozwiązania**

Rysujemy trójkąt prostokątny i wprowadzamy oznaczenia np.:

$2\sqrt{6}x$  - długość przyprostokątnej leżącej przy kącie  $\alpha$

$7x$  - długość przeciwprostokątnej

$c$  - długość przyprostokątnej leżącej naprzeciw kąta  $\alpha$



Z twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy równanie:  $(2\sqrt{6}x)^2 + c^2 = (7x)^2$ .

Wtedy  $c = 5x$ .

Z definicji funkcji trygonometrycznych kąta ostrego w trójkącie prostokątnym otrzymujemy:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{5x}{2\sqrt{6}x} = \frac{5}{2\sqrt{6}}.$$

Z treści zadania wynika, że  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}$ .

Otrzymujemy sprzeczność, zatem nie istnieje taki kąt  $\alpha$ .

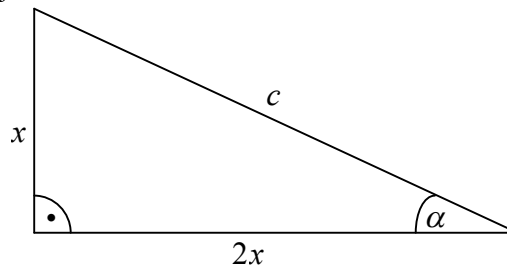
**II sposób rozwiązania**

Rysujemy trójkąt prostokątny i wprowadzamy oznaczenia np.:

$x$  - długość przyprostokątnej leżącej naprzeciw kąta  $\alpha$

$2x$  - długość przyprostokątnej leżącej przy kącie  $\alpha$

$c$  - długość przeciwprostokątnej



Z twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy równanie:  $(2x)^2 + x^2 = c^2$ . Wtedy  $c = \sqrt{5}x$ .

Z definicji funkcji trygonometrycznych kąta ostrego w trójkącie prostokątnym otrzymujemy:

$$\cos x = \frac{2x}{\sqrt{5}x} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

Z treści zadania wynika, że  $\cos x = \frac{2\sqrt{6}}{7}$ .

Otrzymaliśmy sprzeczność, zatem nie istnieje taki kąt  $\alpha$ .

### **Schemat oceniania I i II sposobu rozwiązania**

**Zdający otrzymuje .....1 punkt**

**gdy:**

- zaznaczy kąt  $\alpha$  w trójkącie prostokątnym i wyznaczy długości jego boków w zależności od współczynnika proporcjonalności np.:  $5x, 2\sqrt{6}x, 7x$  lub  $x, 2x, \sqrt{5}x$  i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

### **Uwaga**

Zdający może przyjąć współczynnik proporcjonalności równy 1.

**Zdający otrzymuje .....2 punkty**

**gdy:**

- obliczy  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{5}{2\sqrt{6}}$ , porówna z wartością podaną w treści zadania i stwierdzi, że taki kąt nie istnieje.

**albo**

- obliczy  $\cos \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ , porówna z wartością podaną w treści zadania i stwierdzi, że taki kąt nie istnieje.



### **III sposób rozwiązania**

Korzystamy z tożsamości  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ , otrzymujemy:  $\sin^2 \alpha + \left(\frac{2\sqrt{6}}{7}\right)^2 = 1$ , a stąd

$$\sin \alpha = \frac{5}{7}. \quad (\alpha \text{ kąt ostry } (\sin \alpha > 0)).$$

Korzystamy ze związku między funkcjami trygonometrycznymi tego samego kąta

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \text{ otrzymujemy } \operatorname{tg} \alpha = \frac{\frac{5}{7}}{\frac{2\sqrt{6}}{7}} = \frac{5}{2\sqrt{6}} = \frac{5\sqrt{6}}{12}.$$

Z treści zadania wynika, że  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}$ .

Otrzymujemy sprzeczność, zatem nie istnieje taki kąt  $\alpha$ .

### **IV sposób rozwiązania**

Korzystamy ze związku między funkcjami trygonometrycznymi tego samego kąta

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \text{ otrzymujemy } \sin \alpha = \frac{\sqrt{6}}{7}.$$

Korzystamy z tożsamości  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ , otrzymujemy:  $\left(\frac{\sqrt{6}}{7}\right)^2 + \left(\frac{2\sqrt{6}}{7}\right)^2 = \frac{30}{49} \neq 1$ .

Otrzymujemy sprzeczność, zatem nie istnieje taki kąt  $\alpha$ .

### **Schemat oceniania III i IV sposobu rozwiązania**

**Zdający otrzymuje .....1 punkt**

**gdy:**

- obliczy wartość  $\sin \alpha = \frac{5}{7}$  korzystając ze związku  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$  i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

albo

- obliczy wartość  $\sin \alpha = \frac{\sqrt{6}}{7}$  korzystając ze związku  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$  i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

**Zdający otrzymuje .....2 punkty**

**gdy:**

- obliczy  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{5}{2\sqrt{6}}$  (gdy  $\sin \alpha = \frac{5}{7}$ ), porówna z wartością podaną w treści zadania i stwierdzi, że taki kąt nie istnieje.

albo

- podstawí wartość  $\sin \alpha = \frac{\sqrt{6}}{7}$  do związku  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$  i stwierdzi, że taki kąt nie istnieje.

### **V sposób rozwiązania**

Dla  $\cos \alpha = \frac{2\sqrt{6}}{7}$  odczytujemy z tablic trygonometrycznych przybliżoną miarę kąta:  $\alpha \approx 46^\circ$  (akceptujemy  $\alpha \approx 45^\circ$ ).

Dla  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}$  odczytujemy z tablic trygonometrycznych przybliżoną miarę kąta:  $\alpha \approx 27^\circ$  (akceptujemy  $\alpha \approx 26^\circ$ ).

Otrzymane wyniki (różne miary kąta  $\alpha$  w tym samym trójkącie) pozwalają stwierdzić, że taki kąt nie istnieje.

### **Schemat oceniania V sposobu rozwiązania**

**Zdający otrzymuje .....1 punkt**

**gdy:**

- odczyta z tablic przybliżoną wartość kąta dla  $\cos \alpha = \frac{2\sqrt{6}}{7}$ :  $\alpha \approx 46^\circ$  (akceptujemy  $\alpha \approx 45^\circ$ ) i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy

albo

- odczyta z tablic przybliżoną wartość kąta dla  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}$ :  $\alpha \approx 27^\circ$  (akceptujemy  $\alpha \approx 26^\circ$ ) i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

**Zdający otrzymuje .....2 punkty**

**gdy:**

- dla wyznaczonej wartości kąta  $\alpha$  (gdy  $\cos \alpha = \frac{2\sqrt{6}}{7}$ ) odczyta z tablic wartość  $\operatorname{tg} \alpha$ , porówna ją z wartością podaną w treści zadania i stwierdzi, że taki kąt nie istnieje.

albo

- dla wyznaczonej wartości kąta  $\alpha$  (gdy  $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}$ ) odczyta z tablic wartość  $\cos\alpha$ , porówna ją z wartością podaną w treści zadania i stwierdzi, że taki kąt nie istnieje.

### Uwagi

1. Wszystkie rozwiązania, w których zdający błędnie zaznaczy kąt  $\alpha$  w przedstawionym przez siebie rysunku i z tego korzysta oceniamy na **0 punktów**.
2. Jeśli zdający narysuje dwa trójkąty prostokątne, oznaczy długości boków odpowiednio:  $5, 2\sqrt{6}, 7$  i  $1, 2, \sqrt{5}$  (lub na jednym z nich zaznaczy długości boków obu trójkątów) bez współczynnika proporcjonalności i stwierdzi, że boki mają różną długość, zatem nie istnieje taki kąt, to otrzymuje **0 punktów**. W takim przypadku wymagamy udowodnienia, że boki takich trójkątów nie są proporcjonalne.
3. Jeśli zdający nie odrzuci odpowiedzi ujemnej, to otrzymuje **1 punkt**.

**Zadanie 17. (2 pkt)**

Ciąg geometryczny  $(a_n)$  określony jest wzorem  $a_n = -2 \cdot 3^{n+1}$ . Oblicz iloraz tego ciągu oraz sumę czterech początkowych wyrazów tego ciągu.

**Rozwiązanie**

Obliczamy iloraz ciągu  $(a_n)$ :  $q = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{-2 \cdot 3^{n+2}}{-2 \cdot 3^{n+1}} = 3$

Obliczamy pierwszy wyraz ciągu  $(a_n)$ :  $a_1 = -2 \cdot 3^2 = -18$ .

Obliczamy sumę czterech początkowych wyrazów tego ciągu wykorzystując wzór na sumę

$n$  początkowych wyrazów ciągu geometrycznego  $S_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$ :

$$S_4 = -18 \cdot \frac{3^4 - 1}{3 - 1} = -18 \cdot 40 = -720.$$

**Uwaga**

Zdający może obliczyć sumę ciągu geometrycznego wykorzystując wzór:

$$S_4 = a_1 + a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + a_1 \cdot q^3 = -18 \cdot (1 + 3 + 3^2 + 3^3) = -720 \text{ lub}$$

$$S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4, \text{ gdzie } a_1 = -2 \cdot 3^2 = -18, \quad a_2 = -2 \cdot 3^3 = -54, \quad a_3 = -2 \cdot 3^4 = -162, \\ a_4 = -2 \cdot 3^5 = -486.$$

**Schemat oceniania**

**Zdający otrzymuje .....1 punkt**

**gdy:**

- obliczy  $a_1 = -18$  i obliczy iloraz ciągu  $(a_n)$ :  $q = 3$  i na tym zakończy lub dalej popęlnia błędy.

albo

- obliczy  $a_1 = -18$ ,  $a_2 = -54$ ,  $a_3 = -162$ ,  $a_4 = -486$  i na tym zakończy lub dalej popęlnia błędy.

**Zdający otrzymuje .....2 punkty**

**gdy:**

- iloraz tego ciągu oraz sumę czterech początkowych wyrazów tego ciągu.

**Uwagi**

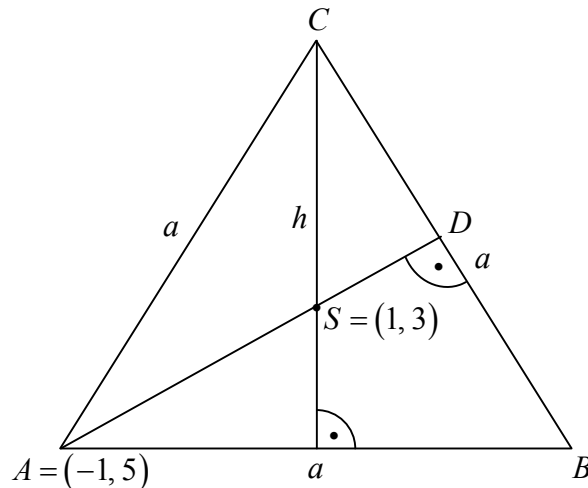
1. Jeżeli zdający popęlni błąd rachunkowy przy obliczaniu pierwszego wyrazu lub ilorazu tego ciągu i konsekwentnie rozwiąże zadanie do końca, to za całe rozwiązanie otrzymuje **1 punkt**.
2. Jeżeli zdający popęlni jeden błąd rachunkowy przy obliczaniu czterech pierwszych wyrazów tego ciągu i konsekwentnie rozwiąże zadanie do końca, to za całe rozwiązanie otrzymuje **1 punkt**.

**Zadanie 18. (4 pkt)**

Dany jest trójkąt równoboczny  $ABC$ , w którym wysokości przecinają się w punkcie o współrzędnych  $S = (1, 3)$ . Jeden z wierzchołków tego trójkąta ma współrzędne  $A = (-1, 5)$ . Oblicz pole i obwód tego trójkąta.

**I sposób rozwiązania**

Rysujemy trójkąt równoboczny  $ABC$  i wprowadzamy oznaczenia np.:



Korzystamy z własności trójkąta równobocznego i zapisujemy :  $|AS| = \frac{2}{3}|AD|$ ,

$$|AD| = h = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Obliczamy  $|AS| = \sqrt{(1+1)^2 + (3-5)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ , zatem  $\frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{2}$  stąd  $a = 2\sqrt{6}$ .

Obliczamy pole trójkąta:  $P = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{(2\sqrt{6})^2 \sqrt{3}}{4} = 6\sqrt{3}$ .

Obliczamy obwód trójkąta:  $O = 3a = 3 \cdot 2\sqrt{6} = 6\sqrt{6}$ .

**Schemat oceniania I sposobu rozwiązania**

**Rozwiązanie, w którym postęp jest wprowadzić niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania..... 1 punkt**

- obliczenie długości odcinka  $|AS| = 2\sqrt{2}$ .

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp.....2 punkty**

- zauważenie, że  $|AS| = \frac{2}{3}h$  i zapisanie równości  $\frac{a\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{2}$ .

albo

- obliczenie wysokości  $h = \frac{a\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{2}$ .

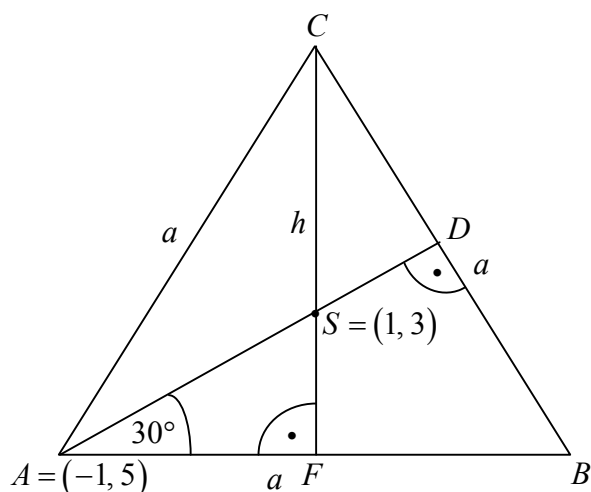
**Pokonanie zasadniczych trudności zadania .....3 punkty**

- obliczenie długości boku trójkąta równobocznego:  $a = 2\sqrt{6}$ .

**Rozwiązanie pełne .....4 punkty**

Obliczenie pola i obwodu trójkąta równobocznego:  $P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 6\sqrt{3}$ ,  $O = 6\sqrt{6}$ .

**II sposób rozwiązania**



Obliczamy długość odcinka  $|AS| = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$ .

Z trójkąta  $AFS$  obliczamy długość boku  $AF$ :  $\cos 30^\circ = \frac{|AF|}{|AS|}$ , stąd  $|AF| = 2\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{6}$ .

Obliczamy długość boku trójkąta:  $a = 2 \cdot |AF| = 2\sqrt{6}$ .

Obliczamy pole trójkąta:  $P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{(2\sqrt{6})^2\sqrt{3}}{4} = 6\sqrt{3}$

Obliczamy obwód trójkąta:  $O = 3a = 3 \cdot 2\sqrt{6} = 6\sqrt{6}$ .

**Schemat oceniania II sposobu rozwiązania**

**Rozwiązanie, w którym postęp jest wprowadzić niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania.....1punkt**

- obliczenie długości odcinka  $|AS| = 2\sqrt{2}$ .

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp.....2punkty**

- zauważenie, że trójkąt  $\sphericalangle SAF = 30^\circ$  i zapisanie  $\cos 30^\circ = \frac{|AF|}{|AS|}$ .

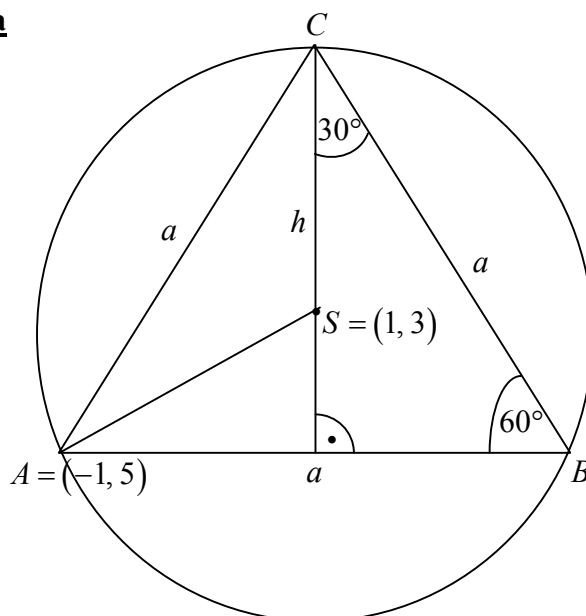
**Pokonanie zasadniczych trudności zadania.....3punkty**

- obliczenie długości boku trójkąta równobocznego:  $a = 2|AF| = 2\sqrt{6}$ .

**Rozwiązanie pełne.....4 punkty**

Obliczenie pola i obwodu trójkąta równobocznego:  $P = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = 6\sqrt{3}$ ,  $O = 6\sqrt{6}$ .

**III sposób rozwiązania**



Punkt  $S$  jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie równobocznym. Punkt  $A$  należy do tego okręgu.

Korzystamy z równania okręgu i otrzymujemy:  $(-1-1)^2 + (5-3)^2 = r^2$ , stąd  $r^2 = 8$ , zatem  $r = 2\sqrt{2}$ .

Obliczamy długość boku trójkąta:  $r = |AS| = \frac{2}{3}h = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}$ , zatem  $a = 2\sqrt{6}$ .

Obliczamy pole trójkąta:  $P = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{(2\sqrt{6})^2 \sqrt{3}}{4} = 6\sqrt{3}$ .

Obliczamy obwód trójkąta:  $O = 3a = 3 \cdot 2\sqrt{6} = 6\sqrt{6}$ .

**Uwaga**

Zdający może obliczyć wysokość trójkąta równobocznego  $h = 3\sqrt{2}$ , następnie obliczyć długość boku trójkąta z twierdzenia Pitagorasa lub z własności trójkąta prostokątnego o kątach ostrych  $30^\circ$  i  $60^\circ$ .

**Schemat oceniania III sposobu rozwiązania**

**Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania.....1punkt**

- obliczenie długości promienia okręgu opisanego na trójkącie równobocznym:  
 $r = 2\sqrt{2}$ .

**Uwaga**

Zdający może przedstawić wynik w postaci  $r = \sqrt{8}$ .

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp.....2punkty**

- Zauważenie, że  $r = \frac{2}{3}h$  i zapisanie równości  $\frac{a\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{2}$ .

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania.....3punkty**

- Obliczenie długości boku trójkąta równobocznego:  $a = 2\sqrt{6}$ .

**Rozwiązanie pełne.....4 punkty**

Obliczenie pola i obwodu trójkąta równobocznego:  $P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 6\sqrt{3}$ ,  $O = 6\sqrt{6}$ .

**Uwagi**

1. Jeśli zdający popełni błąd rachunkowy i konsekwentnie do popełnionego błędu rozwiąże zadanie, to przyznajemy **3 punkty**.
2. Jeśli zdający przyjmie, że  $S$  jest środkiem wysokości trójkąta równobocznego  $\left(|AS| = \frac{1}{2}h\right)$ , to za całe rozwiązanie przyznajemy **1 punkt** (za obliczenie  $|AS|$ ).



**Zadanie 19. (5 pkt)**

Dwie prostokątne działki rekreacyjne mają taką samą powierzchnię równą  $310\text{m}^2$ . Długość drugiej działki jest o 4,8 m krótsza od długości pierwszej, a szerokość o 3 m dłuższa od szerokości pierwszej. Podaj wymiary działki o mniejszym obwodzie.

**Rozwiązanie**

Przyjmujemy oznaczenia np.:  $x, y$  - wymiary I działki:  $x$  - długość,  $y$  - szerokość

Zapisujemy układ równań:

$$\begin{cases} x \cdot y = 310 \\ (x - 4,8) \cdot (y + 3) = 310 \end{cases}$$

Przekształcamy drugie równanie w sposób równoważny:  $x \cdot y + 3x - 4,8y - 14,4 = 310$ , podstawiamy do tego równania  $x \cdot y = 310$  i wyznaczamy z tego równania niewiadomą  $x$ :  $x = 1,6y + 4,8$ .

Wyznaczoną wartość  $x$  podstawiamy do pierwszego równania  $(1,6y + 4,8) \cdot y = 310$  i doprowadzamy to równanie do postaci:  $1,6y^2 + 4,8y - 310 = 0$ , które ma dwa rozwiązania  $y_1 = -15,5$  (nie spełnia warunków zadania) i  $y_2 = 12,5$ .

Zatem, jeżeli  $y = 12,5$ , to  $x = 24,8$  i wtedy działka I ma wymiary: 24,8 m x 12,5 m, zaś działka II: 20 m x 15,5 m.

Obliczamy obwód I działki:  $2 \cdot 24,8 + 2 \cdot 12,5 = 74,6$  m.

Obliczamy obwód II działki:  $2 \cdot 20 + 2 \cdot 15,5 = 71$  m.

Zapisujemy odpowiedź: Działka o mniejszym obwodzie ma wymiary: 20 m x 15,5 m.

**albo**

Przyjmujemy oznaczenia np.:  $x, y$  - wymiary II działki:  $x$  - długość,  $y$  - szerokość

Zapisujemy układ równań:

$$\begin{cases} x \cdot y = 310 \\ (x + 4,8) \cdot (y - 3) = 310 \end{cases}$$

Przekształcamy drugie równanie w sposób równoważny:  $x \cdot y - 3x + 4,8y - 14,4 = 310$ , podstawiamy do tego równania  $x \cdot y = 310$  i wyznaczamy z tego równania niewiadomą  $x$ :  $x = 1,6y - 4,8$ .

Wyznaczoną wartość  $x$  podstawiamy do pierwszego równania  $(1,6y - 4,8) \cdot y = 310$  i doprowadzamy to równanie do postaci:  $1,6y^2 - 4,8y - 310 = 0$ , które ma dwa rozwiązania  $y_1 = 15,5$  i  $y_2 = -12,5$  (nie spełnia warunków zadania).

Zatem, jeżeli  $y = 15,5$ , to  $x = 20$  i wtedy działka II ma wymiary: 20 m x 15,5 m, zaś działka I: 24,8 m x 12,5 m.

Obliczamy obwód II działki:  $2 \cdot 20 + 2 \cdot 15,5 = 71$  m.

Obliczamy obwód I działki:  $2 \cdot 24,8 + 2 \cdot 12,5 = 74,6$  m.

Zapisujemy odpowiedź: Działka o mniejszym obwodzie ma wymiary: 20 m x 15,5 m.

### Schemat oceniania

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania ..... 1 pkt**

- wprowadzenie oznaczeń, np.:  $x, y$  - wymiary I działki i zapisanie równania  $(x-4,8) \cdot (y+3) = 310$ .

albo

- wprowadzenie oznaczeń, np.:  $x, y$  - wymiary II działki i zapisanie równania  $(x+4,8) \cdot (y-3) = 310$ .

### Uwaga

Nie wymagamy opisanie oznaczeń literowych, jeżeli z rozwiązania można wywnioskować, że zdający poprawnie je stosuje.

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ..... 2 pkt**

Zapisanie układu równań z niewiadomymi  $x$  i  $y$ , np.:

$$\begin{cases} x \cdot y = 310 \\ (x-4,8) \cdot (y+3) = 310 \end{cases}, \text{ gdzie } x, y - \text{ wymiary I działki}$$

albo

$$\begin{cases} x \cdot y = 310 \\ (x+4,8) \cdot (y-3) = 310 \end{cases}, \text{ gdzie } x, y - \text{ wymiary II działki}$$

### Uwaga

Zdający nie musi zapisywać układu równań, może od razu zapisać równanie z jedną niewiadomą.

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... 3 pkt**

Zapisanie równania z jedną niewiadomą  $x$  lub  $y$ , np:

$$1,6y^2 + 4,8y - 310 = 0, \text{ gdzie } y - \text{ szerokość I działki}$$

albo

$$x^2 - 4,8x - 496 = 0, \text{ gdzie } x, - \text{ długość I działki}$$

albo

$$1,6y^2 - 4,8y - 310 = 0, \text{ gdzie } y - \text{ szerokość II działki}$$

albo

$$x^2 + 4,8x - 496 = 0, \text{ gdzie } x, - \text{ długość II działki}$$

**Rozwiązanie prawie całkowite ..... 4 pkt**

- rozwiązanie równania kwadratowego z niewiadomą  $y$ :  $y = 12,5$  i obliczenie długości I działki:  $x = 24,8$ .

albo

- rozwiązanie równania kwadratowego z niewiadomą  $x$ :  $x = 24,8$  i obliczenie szerokości I działki:  $y = 12,5$ .

albo

- rozwiązanie równania kwadratowego z niewiadomą  $y$ :  $y = 15,5$  i obliczenie długości II działki:  $x = 20$ .

albo

- rozwiązanie równania kwadratowego z niewiadomą  $x$ :  $x = 20$  i obliczenie szerokości II działki:  $y = 15,5$ .

**Rozwiązanie zadania do końca lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) ..... 4 pkt**

Rozwiązanie równania z niewiadomą  $x$  lub  $y$  z błędem rachunkowym i konsekwentne rozwiązanie zadania do końca.

**Rozwiązanie pełne ..... 5 pkt**

Podanie wymiarów działki o mniejszym obwodzie:  $20 \text{ m} \times 15,5 \text{ m}$ .

### Uwagi

1. Jeżeli zdający **podaje** (bez obliczeń) odpowiedź: wymiary działki o mniejszym obwodzie, to:  $20 \text{ m} \times 15,5 \text{ m}$ , otrzymuje **0 punktów**.
2. Jeżeli zdający od razu zapisze i uzasadni, że obwód drugiej działki jest mniejszy i na tym poprzestanie, otrzymuje **1 punkt**. np.:  
 $O_1 = 2 \cdot (x + y)$  i  $O_2 = 2 \cdot (x + 3 + y - 4,8) = 2 \cdot (x + y - 1,8)$ , zatem  $O_1 > O_2$ .