Miejsce
na naklejkę
z kodem szkoły

POZNAŃ

MATERIAŁ ĆWICZENIOWY Z MATEMATYKI

POZIOM ROZSZERZONY

STYCZEŃ 2010

Czas pracy 180 minut

Instrukcja dla zdającego

1. Sprawdź, czy arkusz zawiera 18 stron (zadania 1 – 11). Ewentualny brak zgłoś przewodniczącemu zespołu nadzorującego.
2. Rozwiązania zadań i odpowiedzi zamieść w miejscu na to przeznaczonym.
3. Nie używaj korektora, a błędne zapisy przekreśl.
4. W rozwiązaniach zadań przedstaw tok rozumowania prowadzący do ostatecznego wyniku.
5. Pamiętaj, że pominięcie argumentacji lub istotnych obliczeń w rozwiązaniu zadania może spowodować, że za to rozwiązanie możesz nie dostać pełnej liczby punktów.
6. Pisz czytelnie. Używaj długopisu/pióra tylko z czarnym tuszem/atramentem.
7. Pamiętaj, że zapisy w brudnopisie nie podlegają ocenie.
8. Obok każdego zadania podana jest maksymalna liczba punktów, którą możesz uzyskać za poprawne rozwiązanie.
9. Możesz korzystać z zestawu wzorów matematycznych, cyrkla i linijki oraz kalkulatora.

Życzymy powodzenia.

Za rozwiązanie wszystkich zadań można otrzymać łącznie **50 punktów**

Wypełnia zdający przed rozpoczęciem pracy

PESEL ZDAJĄCEGO

KOD ZDAJĄCEGO

Zadanie 1. (*5 pkt*)

Udowodnij, że suma sześcianów trzech kolejnych licz naturalnych jest podzielna przez 9.

Zadanie 2. (*4 pkt*)

Dla każdego $n \in N_+$ wyrazy ciągu (a_n) spełniają dwa warunki $a_n + a_{n+1} = \frac{-n^2 + 3n + 17}{n^2 + 1}$ i $a_n - a_{n+1} = \frac{6n + 19}{n^2 + 1}$. Oblicz, które wyrazy tego ciągu są dodatnie.

Odpowiedź: ……………………………………………………………………………….. .

Zadanie 3. (*6 pkt*)

Liczbę 255 przedstaw w postaci czterech całkowitych składników tworzących rosnący ciąg geometryczny wiedząc, że trzeci wyraz tego ciągu jest o 45 większy od wyrazu pierwszego.

Odpowiedź: ………………………………………………………………………………….. .

Zadanie 4. (*4 pkt)*

Różnymi pierwiastkami równania kwadratowego $(m-2)x^2 - 2x + 1 = 0$ są liczby x_1 oraz x_2.

Narysuj wykres funkcji $f(m) = |x_1 + x_2 + x_1 \cdot x_2|$.

Zadanie 5. (*4 pkt*)

Wykaż, że w trójkącie prostokątnym suma długości obu przyprostokątnych jest równa sumie długości średnic okręgu wpisanego i opisanego na tym trójkącie.

Zadanie 6. (*4 pkt*)

Podstawą graniastosłupa prostego jest romb, którego krótsza przekątna ma długość c, a kąt ostry miarę 2α. Pole przekroju wyznaczonego przez krawędź boczną graniastosłupa i dłuższą przekątną podstawy wynosi P. Oblicz długość dłuższej przekątnej graniastosłupa, wykonaj rysunek bryły i zaznacz w nim właściwy przekrój.

Zadanie 7. (*5 pkt*)

W czworokącie $ABCD$ przekątne przecinają się w punkcie o współrzędnych $P=(-3,7)$ w taki sposób, że $|PC|:|AP|=|PD|:|BP|=1:3$. Wiedząc, że $\vec{AC}=[4,6]$ i $\vec{BD}=[-10,-2]$, oblicz współrzędne wierzchołków tego czworokąta. Uzasadnij, że czworokąt ABCD jest trapezem.

Odpowiedź: …………………………………………………………………………………….. .

Zadanie 8. (*5 pkt*)

Wykaż, że cosinus kąta przecięcia się wykresów funkcji $f(x)=\frac{4}{3}x+1$ i $g(x)=-x\sqrt{2}+9$ jest równy $\frac{4\sqrt{6}-3\sqrt{3}}{15}$.

Zadanie 9. (*4 pkt*)

Oblicz wartość funkcji $f(x) = \left|1 - 2^{x-3}\right|$ dla argumentu

$$x = \log_{13}\left(\log_{12}^{2} 8 + \log_{12} 64 \cdot \log_{12} 18 + \log_{12}^{2} 18 + 49^{\frac{1}{\log_3 7}}\right).$$

Odpowiedź: ……………………………………………………………………………….. .

Zadanie 10. (*4 pkt*)

Posługując się wykresem funkcji $f(x) = \cos 2x$ dla $x \in \left(-\pi, \frac{3\pi}{2} \right\rangle$, rozwiąż nierówność $\cos 2x < \sin \alpha$ wiedząc, że miara kąta α jest równa mierze łukowej kąta środkowego okręgu opartego na $\frac{5}{12}$ okręgu.

Odpowiedź: …………………………………………………………………………….. .

Zadanie 11. (*5 pkt*)

Liczba uczniów w klasie jest 812 razy mniejsza od liczby utworzonych z nich uporządkowanych trójek. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania trzech osób, które są zapisane w dzienniku pod numerami pierwszym, drugim, i trzecim.

Odpowiedź: ……………………………………………………………………………..

BRUDNOPIS

BRUDNOPIS