Próbny Egzamin Maturalny z Matematyki (OKE Poznań)

poziom rozszerzony

Styczeń 2008

odpowiedzi

Zadanie 1

Wyznacz dziedzinę funkcji

$$y=\sqrt{x^3-3x^2-4x+12}+\log_{5-x}\left(\frac{x-2}{5}+\frac{2x-4}{5}+\frac{3x-6}{5}+\ldots+\frac{10x-20}{5}\right)$$

Rozwiązanie

$x^3-3x^2-4x+12=x^3-2x^2-(x^2-2x)-(6x-12)=$

$=(x-2)(x^2-x-6).$

$(x-2)(x+2)(x-3)\geqslant 0.$

$x\in\langle -2,2\rangle\cup\langle 3,\infty).$

teraz logarytm. Podstawa musi być dodatnia i różna od 1, czyli

$x\in(-\infty,4)\cup(4,5).$

$$\frac{x-2}{5}+\frac{2x-4}{5}+\frac{3x-6}{5}+\ldots+\frac{10x-20}{5}=\frac{\frac{x-2}{5}+\frac{10x-20}{5}}{2}\cdot 10=$$
$$=11x-22.$$

Zatem

$11x-22>0 \quad\Rightarrow\quad x>2.$

Z trzech otrzymanych warunków mamy:

$\langle 3,4)\cup(4,5).$

Zadanie 2

Rozwiąż równanie $(\sqrt{2}x-\frac{1}{\sqrt{2}})^2+|2x^2-3x+1|=0$.

Rozwiązanie

Suma ta może być równa 0 wtedy, gdy oba jej składniki są 0.

$\sqrt{2}x-\frac{1}{\sqrt{2}}=0 \quad /\cdot\sqrt{2}$

$2x=1$

$x=\frac{1}{2}.$

$x=\frac{1}{2}$ drugi składnik również jest równy 0.

Zadanie 3

Dla jakiego parametru p iloczyn miejsc zerowych funkcji $f(x) = x^2 + 3x - p^2 + 2p$ jest równy mniejszemu pierwiastkowi równania $(3 - \frac{x}{2})(2x - p) = 0$.

Rozwiązanie

Iloczyn miejsc zerowych f jest równy $-p^2 + 2p$. Podane równanie ma dwa rozwiązania $x = 6$ i $x = \frac{p}{2}$. Mamy dwa przypadki.

1. Jeżeli $6 < \frac{p}{2}$, czyli $p > 12$, to mamy równanie

$6 = -p^2 + 2p$

$p^2 - 2p + 6 = 0.$

Równanie to nie ma rozwiązań

2. Jeżeli $p < 12$, to mamy równanie

$$\frac{p}{2} = -p^2 + 2p$$

$2p^2 - 3p = 0$

$$2p(p - \frac{3}{2}) = 0.$$

Odpowiedź: p=0 lub p=1,5

Zadanie 4

Sinus pewnego kąta ostrego α, liczba $\frac{2}{3}$ oraz cosinus tego samego kąta α tworzą w podanej kolejności ciąg geometryczny. Oblicz sumę $\sin\alpha + \cos\alpha$.

Rozwiązanie

Jeżeli trzy liczby a, b i c tworzą ciąg geometryczny to $b^2 = ac$.

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \sin\alpha \cdot \cos\alpha$$

$$\frac{4}{9} = \sin\alpha \cdot \cos\alpha.$$

$(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 = \sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha = 1 + 2\sin\alpha\cos\alpha.$

α jest kątem ostrym, więc

$\sin\alpha + \cos\alpha = \sqrt{1 + 2\sin\alpha\cos\alpha}$

$$\sin\alpha + \cos\alpha = \sqrt{1 + \frac{8}{9}}$$

$$\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{\sqrt{17}}{3}.$$

Zadanie 5

Różnica między drugim wyrazem ciągu geometrycznego a pierwszym wyrazem tego ciągu wynosi -6, a różnica między czwartym a pierwszym wyrazem tego ciągu jest równa -18. Oblicz trzeci wyraz tego ciągu.

Rozwiązanie

$$\begin{cases} aq - a = -6 \\ aq^3 - a = -18 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a(q-1) = -6 \\ a(q^3-1) = -18 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a(q-1) = -6 \\ a(q-1)(q^2+q+1) = -18 \end{cases}$$

$$-6(q^2+q+1) = -18$$

$$q^2+q+1 = 3$$

$$q^2+q-2 = 0.$$

$$\Delta = 9 = 3^2,$$

$q = -2$ lub $q = 1$.

Drugie z tych rozwiązań nie spełnia powyższego układu równań, zatem $q = -2$ i $a = 2$.

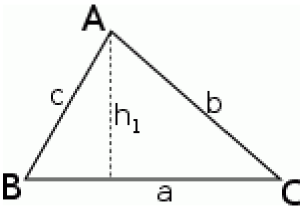
Zatem trzeci wyraz to $aq^2 = 8$.

Zadanie 6

Uzasadnij, że suma długości wysokości w dowolnym trójkącie jest mniejsza od jego obwodu.

Rozwiązanie

Oznaczmy boki trójkąta leżące naprzeciwko wierzchołków A, B i C przez a, b, c, a wysokości wychodzące z tych wierzchołków przez h_1, h_2 i h_3 odpowiednio.



Wysokość h_1 jest najkrótszym odcinkiem łączącym wierzchołek A z prostą BC, zatem $h_1 \leqslant b$ i $h_1 \leqslant c$. Dodając te nierówności stronami mamy

$$2h_1 < b + c.$$

$2h_2 < a + c$

$2h_3 < a + b.$

$2h_1 + 2h_2 + 2h_3 < 2a + 2b + 2c$

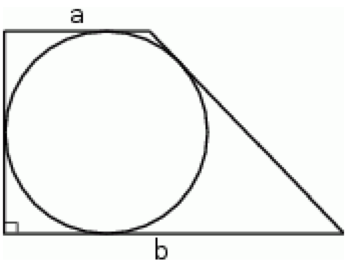
$h_1 + h_2 + h_3 < a + b + c.$

Zadanie 7

Pole trapezu prostokątnego opisanego na okręgu jest równe 5, a obwód trapezu wynosi 10.

Oblicz długość promienia okręgu.

Rozwiązanie



Jeżeli czworokąt jest opisany na okręgu to sumy przeciwległych boków są równe.

$$a + b = \frac{10}{2} = 5,$$

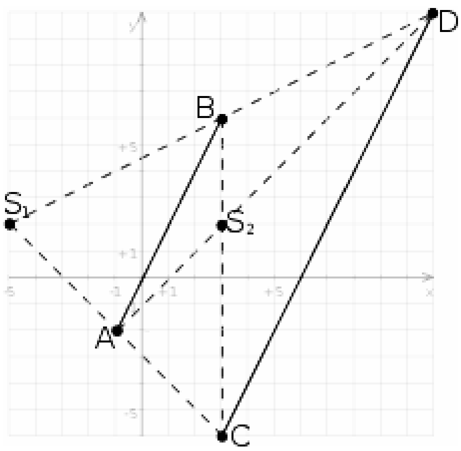
$$5 = \frac{a+b}{2} \cdot h \quad \Rightarrow \quad h = 2.$$

Wysokość h to dokładnie średnica okręgu wpisanego, to $r = 1$.

Zadanie 8

Końcami odcinka są punkty o współrzędnych $A = (-1, -2)$oraz $B = (3, 6)$. Odcinek CD jest obrazem odcinka ABzarówno w jednokładności o dodatniej skali i środku $S_1 = (-5, 2)$, jak i w jednokładności o ujemnej skali i środku $S_2 = (3, 2)$. Oblicz współrzędne końców odcinka CDoraz skalę jednokładności o środku S_2.

Rozwiązanie



$\overrightarrow{S_2D} = k_2\overrightarrow{S_2A}$.

Mamy

$S_1A : (y-2)(-1+5)-(-2-2)(x+5)=0$
$BS_2 : (y-6)(3-3)-(2-6)(x-3)=0.$

$S_1A : y=-x-3$
$BS_2 : x=3.$

Mamy $C=(3,-6)$.

Skaa podobieństwa k_2:

$\overrightarrow{S_2B}=[0,4] \quad \Rightarrow \quad |\overrightarrow{S_2B}|=4$
$\overrightarrow{S_2C}=[0,-8] \quad \Rightarrow \quad |\overrightarrow{S_2C}|=8.$

Zatem $k_2=-2$. Punkt $D=(x,y)$ obliczamy z równości $\overrightarrow{S_2D} = k_2\overrightarrow{S_2A}$.

$\overrightarrow{S_2A}=[-4,-4]$
$\overrightarrow{S_2D}=[x-3,y-2].$

Mamy zatem równanie

$[x-3,y-2]=-2[-4,-4]=[8,8].$

Stąd $x=11$ i $y=10$.

Odpowiedź: C = (3,– 6) , D = (1 1,10) , k_2 = – 2 .

Zadanie 9

Spośród liczb $1^1, 2^2, 3^3, \ldots, 9^9$ wybieramy losowo trzy. Oblicz prawdopodobieństwo, że iloczyn tych liczb jest parzysty.

Rozwiązanie

$$|\Omega| = \binom{9}{3} = \frac{9\cdot 8\cdot 7}{2\cdot 3} = 84.$$

Obliczmy prawdopodobieństwo zdarzenia przeciwnego, tzn. że iloczyn wylosowanych liczb jest nieparzysty. Zatem mamy

$$\binom{5}{3} = \frac{5\cdot 4\cdot 3}{2\cdot 3} = 10.$$

$$P(A') = \frac{10}{84} = \frac{5}{42}.$$

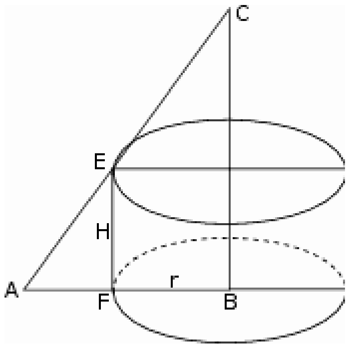
Stąd

$$P(A) = 1 - P(A') = \frac{37}{42}.$$

Zadanie 10

W trójkąt prostokątny o przyprostokątnych o długościach 2 i 4 wpisano prostokąt w ten sposób, że dwa jego boki leżą na przyprostokątnych trójkąta, a jeden z wierzchołków prostokąta leży na przeciwprostokątnej trójkąta. Prostokąt ten obraca się dookoła prostej, zawierającej dłuższą przyprostokątną trójkąta, tworząc walec. Oblicz, który z walców, otrzymanych w powyższy sposób, posiada największe pole powierzchni bocznej i oblicz jego objętość.

Rozwiązanie



$$\frac{AF}{AB} = \frac{FE}{BC}$$
$$\frac{2-r}{2} = \frac{H}{4}$$
$$H = (4 - 2r).$$
$$P_{pb} = 2\pi r H = 2\pi r(4 - 2r) = 4\pi(r(2 - r)).$$

Wykres funkcji pola to parabola o ramionach skierowanych w dół. Zatem największe pole powierzchni bocznej otrzymamy w wierzchołku, czyli dla $r = 1$. Wtedy $H = 2$ i objętość jest równa $V = \pi r^2 H = 2\pi$.