CENTRALNA
KOMISJA
EGZAMINACYJNA

EGZAMIN MATURALNY
W ROKU SZKOLNYM 2016/2017

FORMUŁA DO 2014
(„STARA MATURA”)

MATEMATYKA
POZIOM ROZSZERZONY

ZASADY OCENIANIA ROZWIĄZAŃ ZADAŃ
ARKUSZ MMA-P1

CZERWIEC 2017

Zadanie 1. (0–4)

Rozwiąż równanie $2|x+1|-|x-2|=9$.

Przykładowe rozwiązanie (I sposób)

Wyróżniamy na osi liczbowej trzy przedziały, $(-\infty,-1)$, $\langle -1,2\rangle$, $(2,\infty)$. Rozwiązujemy równanie w tych przedziałach, sprawdzając czy otrzymane rozwiązanie należy do niego.
Dla $x\in(-\infty,-1)$ otrzymujemy równanie $-2x-2+x-2=9$, a stąd $x=-13$. Liczba -13 należy do pierwszego z wyróżnionych przedziałów, więc jest rozwiązaniem podanego równania.
Dla $x\in\langle -1,2\rangle$ otrzymujemy równanie $2x+2+x-2=9$, a stąd $x=3$. Liczba ta nie spełnia założenia $x\in\langle -1,2\rangle$, więc nie jest rozwiązaniem podanego w zadaniu równania.
Dla $x\in(2,\infty)$ otrzymujemy równanie $2x+2-x+2=9$, a stąd $x=5$. Liczba 5 należy do trzeciego z wyróżnionych przedziałów, więc jest rozwiązaniem podanego równania.

Podane równanie ma więc dwa rozwiązania $x=-13$ i $x=5$.

Rozwiązanie (II sposób)

Rozważamy cztery przypadki $\begin{cases} x+1\ge 0 \\ x-2\ge 0\end{cases}$, $\begin{cases} x+1\ge 0 \\ x-2< 0\end{cases}$, $\begin{cases} x+1< 0 \\ x-2\ge 0\end{cases}$, $\begin{cases} x+1< 0 \\ x-2< 0\end{cases}$.
W pierwszym przypadku otrzymujemy równanie $2x+2-x+2=9$, a stąd $x=5$. Liczba ta spełnia obie nierówności pierwszego układu.
W drugim przypadku otrzymujemy równanie $2x+2+x-2=9$, a stąd $x=3$. Liczba ta nie spełnia drugiej nierówności układu, więc nie jest rozwiązaniem.
W trzecim przypadku otrzymujemy sprzeczność, ponieważ żadna liczba nie spełnia jednocześnie dwóch warunków $x<-1$ i $x\ge 2$.
W czwartym przypadku otrzymujemy równanie $-2x-2+x-2=9$, a stąd $x=-13$. Liczba -13 spełnia obie nierówności ostatniego układu, więc jest rozwiązaniem równania.

Podane równanie ma więc dwa rozwiązania $x=-13$ i $x=5$.

Schemat punktowania

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 1 p.

Zdający
- poprawnie wyróżni na osi liczbowej trzy przedziały: $(-\infty,-1)$, $\langle -1,2\rangle$, $(2,\infty)$.

albo
- zapisze cztery przypadki $\begin{cases} x+1\ge 0 \\ x-2\ge 0\end{cases}$, $\begin{cases} x+1\ge 0 \\ x-2< 0\end{cases}$, $\begin{cases} x+1< 0 \\ x-2\ge 0\end{cases}$, $\begin{cases} x+1< 0 \\ x-2< 0\end{cases}$.

Uwaga
Jeżeli zdający popełni błędy w wyznaczaniu przedziałów, ale nie są one konsekwencją błędu rachunkowego popełnionego przy przekształcaniu nierówności, to przyznajemy 0 punktów.
Podobnie 0 punktów otrzymuje zdający, który błędnie zapisał cztery przypadki.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 2 p.

Zdający

- zapisze równanie w poszczególnych przedziałach, np.:

  dla $x \in (-\infty, -1)$ mamy $-2x-2+x-2=9$,

  dla $x \in \langle -1, 2 \rangle$ mamy $2x+2+x-2=9$,

  dla $x \in (2, \infty)$ mamy $2x+2-x+2=9$.

albo

- zapisze równanie w poszczególnych przypadkach, np.:

  gdy $\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ x-2 \geq 0 \end{cases}$, to wtedy $2x+2-x+2=9$,

  gdy $\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ x-2 < 0 \end{cases}$, to wtedy $2x+2+x-2=9$,

  gdy $\begin{cases} x+1 < 0 \\ x-2 \geq 0 \end{cases}$, to wtedy $-2x-2-x+2=9$, (lub stwierdzi, że ten przypadek jest niemożliwy),

  gdy $\begin{cases} x+1 < 0 \\ x-2 < 0 \end{cases}$, to wtedy $-2x-2+x-2=9$.

Rozwiązanie zadania do końca lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) .... 3 p.

Zdający poprawnie rozwiąże równania, sprawdzi czy otrzymane liczby spełniają założenia i popełni błąd w jednym z przypadków.

Rozwiązanie pełne .... 4 p.

Zdający zapisze odpowiedź: Podane równanie ma więc dwa rozwiązania $x=-13$ i $x=5$.

Zadanie 2. (0–3)

Wykaż, że dla $a=\log_{\frac{1}{5}}3+\log_5\sqrt{27}$ i $b=\log_5 3-\log_5\sqrt[9]{3}$ prawdziwa jest równość $\frac{b}{a}=\frac{16}{9}$.

Przykładowe rozwiązanie

Korzystając ze wzoru na zamianę podstawy logarytmu oraz logarytm iloczynu możemy przekształcić $a=\log_{\frac{1}{5}}3+\log_5\sqrt{27}$ do postaci

$$a=\log_{\frac{1}{5}}3+\log_5\sqrt{27}=\frac{\log_5 3}{\log_5\frac{1}{5}}+\log_5 3^{\frac{3}{2}}=-\log_5 3+\log_5 3^{\frac{3}{2}}=\log_5\left(3^{-1}\cdot 3^{\frac{3}{2}}\right)=\frac{1}{2}\log_5 3$$

Korzystając ze wzoru na logarytm ilorazu możemy zapisać $b=\log_5 3-\log_5\sqrt[9]{3}$ w postaci

$$b=\log_5 3-\log_5\sqrt[9]{3}=\log_5\frac{3}{3^{\frac{1}{9}}}=\log_5 3^{\frac{8}{9}}=\frac{8}{9}\log_5 3.$$

Wyznaczamy iloraz $\frac{b}{a}=\frac{\frac{8}{9}\log_5 3}{\frac{1}{2}\log_5 3}=\frac{8}{9}\cdot 2=\frac{16}{9}$.

Zatem równość $\frac{b}{a}=\frac{16}{9}$ jest prawdziwa.

Schemat punktowania

Zdający otrzymuje .... **1 p.**

gdy

- gdy wykorzysta wzór na zamianę podstaw logarytmu i zapisze wyrażenie *a* w postaci $a=\frac{\log_5 3}{\log_5\frac{1}{5}}+\log_5\sqrt{27}$ lub $a=\log_{\frac{1}{5}}3+\frac{\log_{\frac{1}{5}}\sqrt{27}}{\log_{\frac{1}{5}}5}$

albo

- gdy wykorzysta wzór na logarytm ilorazu i zapisze wyrażenie *b* w postaci $b=\log_5\frac{3}{3^{\frac{1}{9}}}$ lub $b=-\log_{\frac{1}{5}}3^{\frac{3}{2}}$.

Zdający otrzymuje .... **2 p.**

- gdy wykorzysta wzór na zamianę podstaw logarytmu oraz logarytm iloczynu i zapisze wyrażenie *a* w postaci $a=\log_5\left(3^{-1}\cdot 3^{\frac{3}{2}}\right)$ lub $a=\log_{\frac{1}{5}}3^{-\frac{1}{2}}$

albo

- gdy przekształci *b* do postaci $b=\frac{8}{9}\log_5 3$.

Zdający otrzymuje .... **3 p.**

gdy przeprowadzi pełny dowód.

Zadanie 3. (0–5)
Ciąg (a_n) jest arytmetyczny, a ciąg (b_n) jest geometryczny. Pierwszy wyraz a_1 ciągu arytmetycznego jest ilorazem ciągu geometrycznego (b_n). Wyrazy ciągu (a_n) są liczbami całkowitymi, a suma ośmiu początkowych wyrazów tego ciągu jest równa 124. Natomiast pierwszy wyraz b_1 ciągu geometrycznego jest różnicą ciągu arytmetycznego (a_n). Suma dwóch pierwszych wyrazów ciągu geometrycznego (b_n) jest równa 18. Wyznacz te ciągi.

I sposób rozwiązania
Oznaczmy przez q pierwszy wyraz ciągu arytmetycznego, a przez r różnicę tego ciągu. Wówczas q, $q+r$, $q+2r$, … są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego.
Jednocześnie r jest pierwszym wyrazem ciągu geometrycznego, a q jego ilorazem, więc r, rq, rq^2, … są kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego.
Z warunków zadania otrzymujemy układ równań:

$$\begin{cases} r+rq=18 \\ \dfrac{2q+7r}{2}\cdot 8=124 \end{cases}$$

Rozwiązując układ równań doprowadzamy do równania z jedną niewiadomą:

Dla r		*dla q*
$7r^2-33r+36=0$	lub	$2q^2-29q+95=0$
$\Delta=81$		$\Delta=81$
$\sqrt{\Delta}=9$		$\sqrt{\Delta}=9$
$r=\dfrac{12}{7}$ lub $r=3$		$q=5$ lub $q=\dfrac{19}{2}$

Zatem

$$\begin{cases} r=\dfrac{12}{7} \\ q=\dfrac{19}{2} \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} r=3 \\ q=5 \end{cases} \qquad \text{lub} \qquad \begin{cases} r=3 \\ q=5 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} r=\dfrac{12}{7} \\ q=\dfrac{19}{2} \end{cases}$$

Warunki zadania spełniają ciągi:
ciąg arytmetyczny o pierwszym wyrazie 5 i różnicy 3 oraz ciąg geometryczny o pierwszym wyrazie 3 i ilorazie 5. Zatem $a_n=3n+2$ i $b_n=3\cdot 5^{n-1}$.

II sposób rozwiązania
Niech a_1 będzie pierwszym wyrazem ciągu arytmetycznego, a r jego różnicą, zaś b_1 pierwszym wyrazem ciągu geometrycznego, a q jego ilorazem. Z warunków zadnia możemy zapisać:

$$\begin{cases} \dfrac{a_1+a_8}{2}\cdot 8=124 \\ b_1\dfrac{1-q^2}{1-q}=18 \\ a_1=q \\ b_1=r \end{cases}$$

W dalszej częś rozwiązania postępujemy tak jak w I sposobie.

Schemat punktowania I i II sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania . ... 1 p.
Zdający
- zapisze kolejne wyrazy ciągów arytmetycznego i geometrycznego za pomocą r i q (lub a_1 i b_1 lub a_1 i r lub b_1 i q)

albo
- zapisze koniunkcję zależności $\frac{a_1+a_8}{2}\cdot 8=124$ i $b_1\frac{1-q^2}{1-q}=18$ dla $q\neq 1$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 p.
Zdający zapisze układ równań z dwiema niewiadomymi, np.: $\begin{cases} r+rq=18 \\ \frac{2q+7r}{2}\cdot 8=124. \end{cases}$

Pokonanie zasadniczych trudności ....3 p.
Zdający przekształci układ równań do równania kwadratowego z jedna niewiadomą r lub q,
np.: $7r^2-33r+36=0$ lub $2q^2-29q+95=0$.

Rozwiązanie prawie pełne .... 4 p.
Zdający
- popełni błąd rachunkowy na etapie rozwiązywania układu równań i konsekwentnie do popełnionego błędu rozwiąże zadanie do końca

albo
- poda jako rozwiązanie dwie pary ciągów: ciąg arytmetyczny o pierwszym wyrazie $\frac{19}{2}$ i różnicy $\frac{12}{7}$ oraz ciąg geometryczny o pierwszym wyrazie $\frac{12}{7}$ i ilorazie $\frac{19}{2}$, oraz ciąg arytmetyczny o pierwszym wyrazie 5 i różnicy 3 oraz ciąg geometryczny o pierwszym wyrazie 3 i ilorazie 5.

Rozwiązanie pełne .... 5 p.
Zdający
- wyznaczy wzory ogólne ciągów $a_n=3n+2$ i $b_n=3\cdot 5^{n-1}$

albo
- wyznaczy ciąg arytmetyczny o pierwszym wyrazie 5 i różnicy 3 oraz ciąg geometryczny o pierwszym wyrazie 3 i ilorazie 5.

Zadanie 4. (0–5)
Rozwiąż równanie $2\cos^4 x+5\sin^2 x=3$ w przedziale $\langle 0,\pi\rangle$.

Przykładowe rozwiązanie (I sposób)
Wykorzystujemy wzór na „jedynkę trygonometryczną i przekształcamy równanie do postaci, w której występuje tylko jedna funkcja trygonometryczna argumentu x: $2\cos^4 x+5\sin^2 x=3$

$2\cos^4 x+5(1-\cos^2 x)^2=3$

Porządkujemy i otrzymujemy równanie: $2\cos^4 x-5\cos^2 x+2=0$.
Jest to równanie kwadratowe, w którym niewiadomą jest $\cos^2 x$.

Rozwiązaniem równania $2\cos^4 x - 5\cos^2 x + 2 = 0$ jest $\cos^2 x = \frac{1}{2}$ lub $\cos^2 x = 2$.
Równanie $\cos^2 x = 2$ nie ma rozwiązań, gdyż $\cos x \in \langle -1, 1 \rangle$.
Natomiast równanie $\cos^2 x = \frac{1}{2}$ możemy zapisać jako alternatywę równań $\cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ lub $\cos x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$. W przedziale $\langle 0, \pi \rangle$ rozwiązaniem równania $\cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ jest: $x = \frac{\pi}{4}$, a rozwiązaniem równania $\cos x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ jest $x = \frac{3\pi}{4}$.

Równanie $2\cos^4 x + 5\sin^2 x = 3$ w przedziale $\langle 0, \pi \rangle$ ma dwa rozwiązania: $x = \frac{\pi}{4}$ lub $x = \frac{3\pi}{4}$.

Rozwiązanie (II sposób)
Wykorzystujemy wzór na „jedynkę" trygonometryczną i przekształcamy równanie do postaci, w której występuje tylko jedna funkcja trygonometryczna argumentu x: $2\cos^4 x + 5\sin^2 x = 3$
$2\left(1 - \sin^2 x\right)^2 + 5\sin^2 x = 3$
$2\left(1 - 2\sin^2 x + \sin^4 x\right) + 5\sin^2 x = 3$
Porządkujemy i otrzymujemy równanie: $2\sin^4 x + \sin^2 x - 1 = 0$.
Jest to równanie kwadratowe, w którym niewiadomą jest $\sin^2 x$.
Rozwiązaniem równania $2\sin^4 x + \sin^2 x - 1 = 0$ jest $\sin^2 x = \frac{1}{2}$ lub $\sin^2 x = -1$. Równanie $\sin^2 x = -1$ nie ma rozwiązań. Natomiast równanie $\sin^2 x = \frac{1}{2}$ możemy zapisać jako alternatywę równań $\sin x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ lub $\sin x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$. W przedziale $\langle 0, \pi \rangle$ równanie $\sin x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ma rozwiązania: $x = \frac{\pi}{4}$ lub $x = \frac{3\pi}{4}$, a równanie $\sin x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ nie ma rozwiązania.
Równanie $2\cos^4 x + 5\sin^2 x = 3$ w przedziale $\langle 0, \pi \rangle$ ma dwa rozwiązania: $x = \frac{\pi}{4}$ lub $x = \frac{3\pi}{4}$.

Schemat punktowania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania .... 1 p.
Zdający zapisze równanie w zależności od jednej funkcji trygonometrycznej tego samego argumentu, np.: $2\cos^4 x - 5\cos^2 x + 2 = 0$ lub $2\sin^4 x + \sin^2 x - 1 = 0$, i na tym zakończy.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 p.
Zdający
- zapisze rozwiązania równania $2\cos^4 x - 5\cos^2 x + 2 = 0$: $\cos^2 x = \frac{1}{2}$ i $\cos^2 x = 2$

albo

- zapisze rozwiązania równania $2\sin^4 x + \sin^2 x - 1 = 0$: $\sin^2 x = \frac{1}{2}$ lub $\sin^2 x = -1$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 p.

Zdający

- zapisze alternatywę $\cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ lub $\cos x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ oraz stwierdzi, że dla $\cos^2 x = 2$ brak rozwiązań w przedziale $\langle 0, \pi \rangle$

albo

- zapisze alternatywę $\sin x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ lub $\sin x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ oraz stwierdzi, że dla $\sin^2 x = -1$ brak rozwiązań

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie zadania do końca, lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) .... 4 p.

Zdający

- rozwiąże jedno z równań $\cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}$: $x = \frac{\pi}{4}$ lub $\cos x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$: $x = \frac{3\pi}{4}$

albo

- rozwiąże jedno z równań $\sin x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ($x = \frac{\pi}{4}$ lub $x = \frac{3\pi}{4}$) lub $\sin x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ (brak rozwiązań w przedziale $\langle 0, \pi \rangle$).

Rozwiązanie pełne .... 5 p.

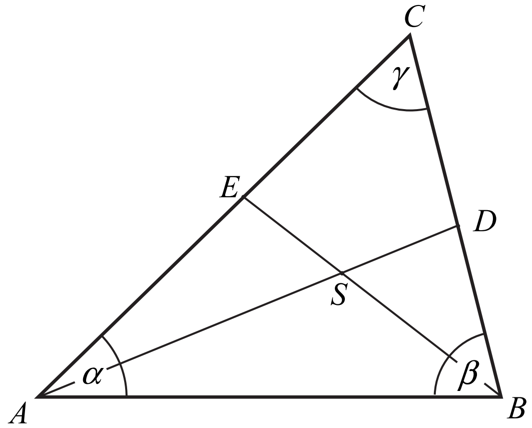
Zdający zapisze rozwiązania równania $2\cos^4 x + 5\sin^2 x = 3$ w przedziale $\langle 0, \pi \rangle$: $x = \frac{\pi}{4}$ lub $x = \frac{3\pi}{4}$ (albo $x = 45^\circ$ lub $x = 135^\circ$).

Uwaga

Jeżeli zdający podaje ogólne rozwiązanie równania trygonometrycznego, bez uwzględnienia podanego przedziału ($x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ i $x = \frac{3}{4}\pi + 2k\pi$, gdzie k jest liczbą całkowitą), to otrzymuje **4 punkty**.

Zadanie 5. (0–3)

Miary kątów trójkąta *ABC* są równe $\alpha = |\sphericalangle BAC|$, $\beta = |\sphericalangle ABC|$ i $\gamma = |\sphericalangle ACB|$. Punkt *S* jest środkiem okręgu wpisanego w ten trójkąt, a proste zawierające odcinki *AS* i *BS* przecinają boki *BC* i *AC* tego trójkąta w punktach odpowiednio *D* i *E* (zobacz rysunek).



Wykaż, że jeżeli $\alpha + \beta = 2\gamma$, to na czworokącie *DCES* można opisać okrąg.

I sposób rozwiązania

Ponieważ *S* jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąta *ABC*, więc półproste *AS* i *BS* to dwusieczne kątów *BAC* i *ABC* tego trójkąta. Zatem

$$|\sphericalangle BAS| = \frac{\alpha}{2} \text{ i } |\sphericalangle ABS| = \frac{\beta}{2}.$$

Zatem $|\sphericalangle ASB| = 180° - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2}$. Kąty *ASB* i *DSE* są wierzchołkowe, więc

$$|\sphericalangle DSE| = |\sphericalangle ASB| = 180° - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2} = 180° - \frac{\alpha+\beta}{2}.$$

Suma miar kątów *DSE* i *DCE* czworokąta *DCES* jest równa

$$|\sphericalangle DSE| + |\sphericalangle DCE| = \left(180° - \frac{\alpha+\beta}{2}\right) + \gamma,$$

ale z założenia $\alpha + \beta = 2\gamma$, więc

$$|\sphericalangle DSE| + |\sphericalangle DCE| = 180° - \frac{2\gamma}{2} + \gamma = 180°,$$

co oznacza, że $|\sphericalangle SDC| + |\sphericalangle SEC| = 180°$, więc na czworokącie *DCES* można opisać okrąg.

To kończy dowód.

II sposób rozwiązania

Ponieważ *S* jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąta *ABC*, więc półproste *AS* i *BS* to dwusieczne kątów *BAC* i *ABC* tego trójkąta. Zatem

$$|\sphericalangle EAS| = \frac{\alpha}{2} \text{ i } |\sphericalangle DBS| = \frac{\beta}{2}.$$

Zatem $|\sphericalangle AEB| = 180° - \alpha - \frac{\beta}{2}$ oraz $|\sphericalangle ADB| = 180° - \frac{\alpha}{2} - \beta$. Kąty *SEC* i *SDC* to kąty przyległe do kątów odpowiednio *AEB* i *ADB*, więc

$$|\sphericalangle SEC| = 180° - |\sphericalangle AEB| = 180° - \left(180° - \alpha - \frac{\beta}{2}\right) = \alpha + \frac{\beta}{2}$$

oraz

$$|\sphericalangle SDC| = 180^\circ - |\sphericalangle ADB| = 180^\circ - \left(180^\circ - \frac{\alpha}{2} - \beta\right) = \frac{\alpha}{2} + \beta .$$

Suma miar kątów *SEC* i *SDC* czworokąta *DCES* jest równa

$$|\sphericalangle SEC| + |\sphericalangle SDC| = \alpha + \frac{\beta}{2} + \frac{\alpha}{2} + \beta = \frac{3}{2}(\alpha + \beta).$$

ale z założenia $\alpha + \beta = 2\gamma$, więc

$$|\sphericalangle SEC| + |\sphericalangle SDC| = \frac{3}{2}(\alpha + \beta) = \frac{3}{2} \cdot 2\gamma = 3\gamma .$$

Suma miar kątów trójkąta jest równa 180°, więc $\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta)$. Stąd i z założenia wynika, że $\gamma = 180^\circ - 2\gamma$, więc $3\gamma = 180^\circ$, czyli $\gamma = 60^\circ$. W rezultacie

$$|\sphericalangle SEC| + |\sphericalangle SDC| = 3\gamma = 3 \cdot 60^\circ = 180^\circ .$$

Stąd z kolei wynika, że $|\sphericalangle SDC| + |\sphericalangle SEC| = 180^\circ$, więc na czworokącie *DCES* można opisać okrąg. To kończy dowód.

Schemat punktowania I i II sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje .... 1 p.

gdy

- wyznaczy kąt *ASB* w zależności od α i β: $|\sphericalangle ASB| = 180^\circ - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2}$

albo

- wyznaczy kąt *AEB* w zależności od α i β: $|\sphericalangle AEB| = 180^\circ - \alpha - \frac{\beta}{2}$,

albo

- wyznaczy kąt *ADB* w zależności od α i β: $|\sphericalangle ADB| = 180^\circ - \frac{\alpha}{2} - \beta$,

albo

- wyznaczy miarę kąta *ACB*: $\gamma = 60^\circ$

i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

Zdający otrzymuje .... 2 p.

gdy

- wyznaczy sumę miar kątów *DSE* i *DCE* czworokąta *DCES* zależności od α, β i γ:

  $|\sphericalangle DSE| + |\sphericalangle DCE| = \left(180^\circ - \frac{\alpha+\beta}{2}\right) + \gamma$

albo

- wyznaczy sumę miar kątów *SDC* i *SEC* czworokąta *DCES* zależności od α, β oraz wyznaczy miarę kata γ: $|\sphericalangle SEC| + |\sphericalangle SDC| = \frac{3}{2}(\alpha + \beta)$ i $\gamma = 60^\circ$,

albo

- wyznaczy miarę kąta *ACB* oraz miarę kąta *DSE*: $\gamma = 60^\circ$, $|\sphericalangle DSE| = |\sphericalangle ASB| = 120^\circ$

i na tym zakończy lub nie uzasadni tezy poprawnie.

Zdający otrzymuje .... 3 p.

gdy przeprowadzi pełne rozumowanie.

Zadanie 6. (0–5)

Prosta l, na której leży punkt $P=(8,2)$, tworzy z dodatnimi półosiami układu współrzędnych trójkąt prostokątny o polu równym 36. Wyznacz równanie prostej l.

I sposób rozwiązania

Niech szukana prosta l ma równanie kierunkowe $y=ax+b$. Możemy założyć, że $a<0$ i $b>0$.

Ponieważ punkt $P=(8,2)$ leży na prostej l, więc

$$8a+b=2.$$

Załóżmy, że prosta l przecina dodatnią półoś osi Ox w punkcie M, zaś dodatnią półoś osi Oy

w punkcie N. Wtedy $M=\left(-\frac{b}{a},\,0\right)$ i $N=(0,b)$. Ponieważ pole trójkąta OMN, gdzie $O=(0,0)$ jest równe 36, otrzymujemy zatem równanie

$$36=\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{b}{a}\right)\cdot b,$$

Skąd $a=-\frac{b^2}{72}$. Po podstawieniu wyrażenia $-\frac{b^2}{72}$ w miejsce a do równania $8a+b=2$, równanie to przyjmuje postać

$$-\frac{b^2}{9}+b=2,$$

czyli

$$b^2-9b+18=0.$$

Równanie $b^2-9b+18=0$ ma dwa rozwiązania $b=3$ oraz $b=6$.

Jeżeli $b=3$, to $a=-\frac{1}{8}$. Jeżeli $b=6$, to $a=-\frac{1}{2}$. Są zatem dwie proste o następujących równaniach:

$$y=-\frac{1}{8}x+3 \text{ oraz } y=-\frac{1}{2}x+6.$$

Schemat punktowania I sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania .... 1 p.

Zdający zapisze zależność wynikającą z faktu, że punkt $P=(8,2)$ leży na prostej o równaniu,
$y=ax+b$, np.

$$8a+b=2$$

albo

równanie opisującego dane pole trójkąta prostokątnego, np.

$$36=\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{b}{a}\right)\cdot b$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 p.
Zdający zapisze układ równań z niewiadomymi a i b

$$8a+b=2 \text{ i } 36=\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{b}{a}\right)\cdot b$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.
Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 p.
Zdający przekształci powyższy układ równań do równania z jedną niewiadomą, np.

$$-\frac{8b^2}{72}+b=2 \text{ lub } 36=-\frac{(2-8a)^2}{2a}$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Uwagi
1. Zdający może rozciąć omawiany trójkąt prostokątny na prostokąt o bokach 8 i 2 oraz dwa trójkąty prostokątne o przyprostokątnych $y-2$ i 8 oraz $x-8$ i 2, gdzie $B=(0,\ y)$ i $A=(x,\ 0)$ są punktami przecięcia prostej o równaniu $y=ax+b$. Oczywiście $y>2$ i $x>8$. Otrzyma wtedy następujący układ równań

$$\frac{(x-8)\cdot 2}{2}+\frac{(y-2)\cdot 8}{2}=20 \text{ i } \frac{x\cdot y}{2}=36,$$

który po przekształceniu do równania z jedną niewiadomą ma postać

$$y+\frac{18}{y}=9 \text{ lub } \frac{288}{x}+x=36.$$

Wtedy za każde z równań otrzyma po **1 punkcie**, za układ równań **2 punkty**. Za równanie z jedną niewiadomą otrzymuje **3 punkty**.

2. Konstrukcja schematu pozostaje taka sama w przypadku, gdy zdający rozważa równość $8a+b=2$ i uzależnia współczynniki a i b od współrzędnych punktów na osiach, np. $A=(x,\ 0)$ i $B=(0,\ y)$. Wtedy $a=-\frac{72}{x^2}$ i $b=\frac{72}{x}$. Równanie $8a+b=2$ przyjmuje zatem postać $8\cdot\frac{-72}{x^2}+\frac{72}{x}=2$. Jego rozwiązaniami są liczby $x=12$ oraz $x=24$.
3. Jeżeli zdający wykorzysta wzór na odległość d prostej o równaniu $y=ax+b$ od punktu $O=(0,\ 0)$, to długość odcinka AB, gdzie $A=(x,\ 0)$ i $B=(0,\ y)$, jest równa $|AB|=\sqrt{\left(\frac{8-2a}{a}\right)^2+(8-2a)^2}$, natomiast $d=\frac{|8a-2|}{\sqrt{a^2+1}}$. Za każdy z tych zapisów otrzymuje **1 punkt**. Jeśli doprowadzi równanie $36=\frac{1}{2}\cdot d\cdot|AB|$ do równania z jedną niewiadomą, np. $72=\frac{|8a-2|}{\sqrt{a^2+1}}\cdot\sqrt{\left(\frac{8-2a}{a}\right)^2+(8-2a)^2}$, to otrzymuje **3 punkty**. To równanie po przekształceniu jest równoważne równaniu $16a^2+10a+1=0$.

Rozwiązanie zadania do końca, lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe).. 4 p.
Zdający popełni błąd rachunkowy w którejkolwiek fazie rozwiązania zadania i konsekwentnie do tego błędu obliczy pole szukanego przekroju tego ostrosłupa.

Rozwiązanie pełne .... 5 p.
Zdający zapisze równania szukanych prostych: $y=-\frac{1}{8}x+3$ oraz $y=-\frac{1}{2}x+6$.

Uwagi

1. Jeżeli zdający wyznaczy współrzędne punktów przecięcia prostej o równaniu $y=ax+b$, na której leży dany punkt $P=(8,2)$, np. $A=(24,0)$ i $B=(0,3)$ lub $A=(12,0)$ i $B=(0,6)$ i nie poda równań obu prostych, to otrzymuje **4 punkty**. Jeżeli przy tym błędnie zapisze pary tych punktów, np. $A=(24,0)$ i $B=(0,6)$ lub poda współrzędne czterech punktów bez poprawnego uporządkowania, to otrzymuje **3 punkty**.
2. Przyjęcie do obliczeń punktu $P=(2,8)$ traktujemy jako błąd nieuwagi. Takie rozwiązania oceniamy w skali **0–5**.
3. Jeżeli zdający odgadnie równanie którejkolwiek z prostych (rozważając lub nie rozkłady na czynniki liczby 72), to otrzymuje **1 punkt**.

II sposób rozwiązania

Załóżmy, że prosta l przecina dodatnie półosie układu współrzędnych w punktach $A=(a,0)$ i $B=(0,b)$, $a>0$, $b>0$. Wtedy jej równanie odcinkowe ma postać

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1.$$

Ponieważ punkt $P=(8,2)$ leży na prostej l, więc $\frac{8}{a}+\frac{2}{b}=1$. Ponadto pole trójkąta ABO jest równe 36, gdzie O to punkt $O=(0,0)$, zatem $\frac{1}{2}\cdot a\cdot b=36$. Rozwiązujemy układ równań

$$\begin{cases}\frac{8}{a}+\frac{2}{b}=1\\ a\cdot b=72\end{cases}$$

Po przekształceniu pierwszego równania do postaci $2(4a+b)=a\cdot b$ zapisujemy układ w postaci równoważnej

$$\begin{cases}4b+a=36\\ a\cdot b=72\end{cases}$$

Teraz wyznaczamy z pierwszego równania niewiadomą $a=36-4b$. Po podstawieniu do równania drugiego uzyskuje ono postać

$$(36-4b)b=72 \text{ czyli } b^2-9b+18=0.$$

Równanie $b^2-9b+18=0$ ma dwa rozwiązania $b=6$ oraz $b=3$.
Jeżeli $b=6$, to $a=12$. Jeżeli $b=3$, to $a=24$.
Są zatem dwie takie proste – jedna o równaniu $\frac{x}{12}+\frac{y}{6}=1$, druga o równaniu $\frac{x}{24}+\frac{y}{3}=1$.

Schemat punktowania II sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania .... 1 p.
Zdający zapisze równanie opisujące dane pole trójkąta prostokątnego, np.

$$\frac{1}{2}\cdot a\cdot b=36$$

albo

równanie odcinkowe prostej przechodzącej przez punkt $P=(8,\ 2)$

$$\frac{8}{a}+\frac{2}{b}=1$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 p.
Zdający zapisze układ równań

$$\frac{8}{a}+\frac{2}{b}=1 \quad \text{i} \quad \frac{1}{2}\cdot a\cdot b=36$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 p.
Zdający przekształci powyższy układ równań do równania kwadratowego, np.

$$(36-4b)\cdot b=72 \text{ lub } \frac{36-a}{4}\cdot a=72$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

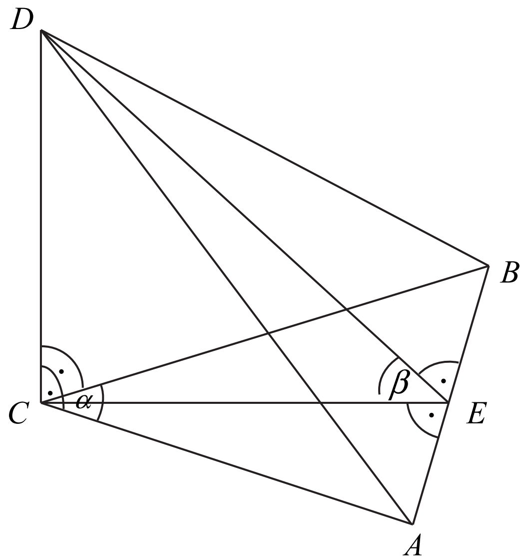
Rozwiązanie zadania do końca, lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) .... 4 p.
Zdający popełni błąd rachunkowy w którejkolwiek fazie rozwiązania zadania i konsekwentnie do tego błędu obliczy pole szukanego przekroju tego ostrosłupa.

Rozwiązanie pełne .... 5 p.
Zdający zapisze równania szukanych prostych: $\frac{x}{12}+\frac{y}{6}=1$ oraz $\frac{x}{24}+\frac{y}{3}=1$.

Zadanie 7. (0–6)

Podstawą ostrosłupa *ABCD* jest trójkąt równoramienny o podstawie $|AB| = b$ i kącie α pomiędzy ramionami. Krawędź *CD* jest wysokością ostrosłupa, a kąt nachylenia ściany *ABD* do podstawy ostrosłupa jest równy β. Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa.

Przykładowe rozwiązanie (I sposób)



Oznaczmy przez *E* środek krawędzi *AB* tego ostrosłupa.

$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{b}{2|CE|}$, stąd $|CE| = \frac{b}{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$.

Obliczmy wysokość ostrosłupa.

$\operatorname{tg}\beta = \frac{|CD|}{|CE|}$, a stąd $|CD| = |CE| \cdot \operatorname{tg}\beta = \frac{b\operatorname{tg}\beta}{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$.

Obliczmy wysokość *DE* ściany *ABD*.

$\cos\beta = \frac{|CE|}{|DE|}$, a stąd $|DE| = \frac{|CE|}{\cos\beta} = \frac{b}{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\beta}$.

Obliczmy krawędź AC tego ostrosłupa.

$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{b}{2|AC|}$, a stąd $|AC| = \frac{b}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$.

Obliczmy objętość i pole powierzchni całkowitej ostrosłupa.

$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot b \cdot \frac{b}{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{b\operatorname{tg}\beta}{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}} = \frac{b^3 \cdot \operatorname{tg}\beta}{24 \cdot \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$,

$$P=\frac{1}{2}\cdot b\cdot\frac{b}{2\text{tg}\frac{\alpha}{2}}+\frac{1}{2}\cdot b\cdot\frac{b}{2\text{tg}\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\beta}+2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{b}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{b\text{tg}\beta}{2\text{tg}\frac{\alpha}{2}}=\frac{b^2}{4\text{tg}\frac{\alpha}{2}}+\frac{b^2}{4tg\frac{\alpha}{2}\cos\beta}+\frac{b^2\text{tg}\beta}{4\sin\frac{\alpha}{2}\text{tg}\frac{\alpha}{2}}=$$

$$=\frac{b^2}{4\text{tg}\frac{\alpha}{2}}\left(1+\frac{1}{\cos\beta}+\frac{\text{tg}\beta}{\sin\frac{\alpha}{2}}\right)$$

Uwaga
Można też wyznaczyć długości poszczególnych odcinków za pomocą funkcji trygonometrycznych bez użycia połowy kąta:

$|AC|=\frac{b}{\sqrt{2(1-\cos\alpha)}}$,

$|CE|=\frac{b\sin\alpha}{2(1-\cos\alpha)}$,

$|CD|=\frac{b\sin\alpha\cdot\text{tg}\beta}{2(1-\cos\alpha)}$,

$|DE|=\frac{b\sin\alpha}{2(1-\cos\alpha)\cos\beta}$.

Wówczas $V=\frac{b^3\sin^2\alpha\cdot\text{tg}\beta}{24(1-\cos\alpha)^2}$ i $P=\frac{b^2\sin\alpha}{4(1-\cos\alpha)}\left(1+\frac{1}{\cos\beta}+\frac{2\text{tg}\beta}{\sqrt{2(1-\cos\alpha)}}\right)$.

Schemat punktowania I sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania .... 1 p.

Zdający

- obliczy długość odcinka $|CE|=\frac{b}{2\text{tg}\frac{\alpha}{2}}$ lub $|CE|=\frac{b\sin\alpha}{2(1-\cos\alpha)}$,

albo

- obliczy długość odcinka $|AC|=\frac{b}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$ lub $|AC|=\frac{b}{\sqrt{2(1-\cos\alpha)}}$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 p.

Zdający obliczy długość odcinka $|CE|=\frac{b}{2\text{tg}\frac{\alpha}{2}}$ lub $|CE|=\frac{b\sin\alpha}{2(1-\cos\alpha)}$ oraz obliczy długość odcinka $|AC|=\frac{b}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$ lub $|AC|=\frac{b}{\sqrt{2(1-\cos\alpha)}}$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 p.

Zdający

- obliczy długość odcinka $|CD| = \dfrac{b\operatorname{tg}\beta}{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$ lub $|CD| = \dfrac{b\sin\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}{2(1-\cos\alpha)}$,

albo

- obliczy długość odcinka $|DE| = \dfrac{b}{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\beta}$ lub $|DE| = \dfrac{b\sin\alpha}{2(1-\cos\alpha)\cos\beta}$.

Uwaga! W przypadku obliczenia obu długości $|CD|$ i $|DE|$ zdający otrzymuje **4 punkty**.

Rozwiązanie prawie pełne .... 5 p.

Zdający

- obliczy objętość $V = \dfrac{b^3\cdot\operatorname{tg}\beta}{24\cdot\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$ lub $V = \dfrac{b^3\sin^2\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}{24(1-\cos\alpha)^2}$

albo

- obliczy pole powierzchni całkowitej $P = \dfrac{b^2}{4\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}} + \dfrac{b^2}{4tg\frac{\alpha}{2}\cos\beta} + \dfrac{b^2\operatorname{tg}\beta}{4\sin\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$

lub $P = \dfrac{b^2\sin\alpha}{4(1-\cos\alpha)}\left(1+\dfrac{1}{\cos\beta}+\dfrac{2\operatorname{tg}\beta}{\sqrt{2(1-\cos\alpha)}}\right)$

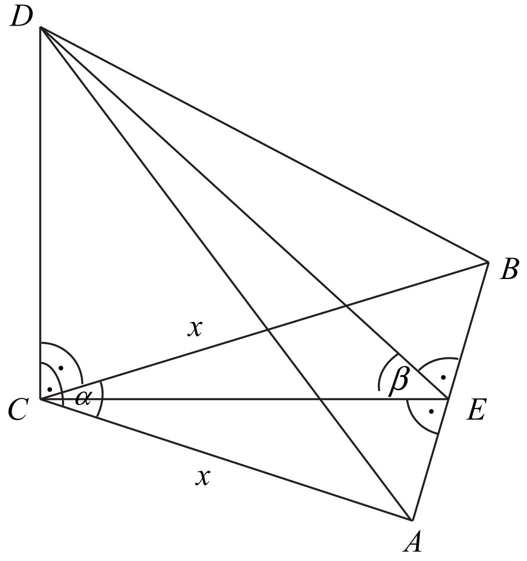
Rozwiązanie pełne .... 6 p.

Zdający obliczy objętość $V = \dfrac{b^3\cdot\operatorname{tg}\beta}{24\cdot\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$ lub $V = \dfrac{b^3\sin^2\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}{24(1-\cos\alpha)^2}$

oraz obliczy pole powierzchni całkowitej $P = \dfrac{b^2}{4\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}} + \dfrac{b^2}{4tg\frac{\alpha}{2}\cos\beta} + \dfrac{b^2\operatorname{tg}\beta}{4\sin\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$

lub $P = \dfrac{b^2\sin\alpha}{4(1-\cos\alpha)}\left(1+\dfrac{1}{\cos\beta}+\dfrac{2\operatorname{tg}\beta}{\sqrt{2(1-\cos\alpha)}}\right)$.

Rozwiązanie (II sposób)



Niech $|AC| = |BC| = x$, $|CD| = H$, $|CE| = h$ i $|DE| = d$.
Wyznaczamy ramię x trójkąta ABC:

Zapisujemy twierdzenie cosinusów: $b^2 = x^2 + x^2 - 2x^2\cos\alpha$,

$$b^2 = 2x^2(1-\cos\alpha),$$

$$2x^2 = \frac{b^2}{1-\cos\alpha},$$

$$x = \frac{b}{\sqrt{2(1-\cos\alpha)}}.$$

Wyznaczamy pole trójkąta ABC: $P_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}x^2\sin\alpha$,

$$P_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}\frac{b^2\sin\alpha}{2(1-\cos\alpha)},$$

$$P_{\triangle ABC} = \frac{b^2\sin\alpha}{4(1-\cos\alpha)}.$$

Zapisujemy pole trójkąta ABC na dwa sposoby: $\frac{1}{2}b\cdot h = \frac{b^2\sin\alpha}{4(1-\cos\alpha)}$ i wyznaczamy

wysokość h podstawy ostrosłupa $ABCD$: $h = \frac{b\sin\alpha}{2(1-\cos\alpha)}$.

W trójkącie CDE: $\mathrm{tg}\beta = \frac{|CD|}{|CE|} = \frac{H}{h}$, stąd $H = h\cdot\mathrm{tg}\beta$. Zatem $H = \frac{b\,\mathrm{tg}\beta\sin\alpha}{2(1-\cos\alpha)}$.

Wyznaczamy objętość ostrosłupa $ABCD$:

$$V = \frac{1}{3}\cdot\frac{b^2\sin\alpha}{4(1-\cos\alpha)}\cdot\frac{b\,\mathrm{tg}\beta\sin\alpha}{2(1-\cos\alpha)} = \frac{b^3\,\mathrm{tg}\beta\sin^2\alpha}{24(1-\cos\alpha)^2}.$$

Obliczmy wysokość DE ściany ABD:

W trójkącie CDE: $\cos\beta = \frac{|CE|}{|DE|} = \frac{h}{d}$, stąd $h = d\cdot\cos\beta$. Zatem $d = \frac{b\sin\alpha}{2\cos\beta(1-\cos\alpha)}$.

Wyznaczamy pole trójkąta *ABD*: $P_{\triangle ABD}=\frac{1}{2}b\cdot d=\frac{1}{2}\frac{b^2\sin\alpha}{2\cos\beta\left(1-\cos\alpha\right)}=\frac{b^2\sin\alpha}{4\cos\beta\left(1-\cos\alpha\right)}$.

Wyznaczamy pola trójkątów *ACD* i *BCD*:

$$P_{\triangle ACD}=P_{\triangle BCD}=\frac{1}{2}x\cdot H=\frac{1}{2}\cdot\frac{b}{\sqrt{2\left(1-\cos\alpha\right)}}\cdot\frac{b\,\mathrm{tg}\beta\sin\alpha}{2\left(1-\cos\alpha\right)}=\frac{b^2\,\mathrm{tg}\beta\sin\alpha}{4\sqrt{2\left(1-\cos\alpha\right)}\cdot\left(1-\cos\alpha\right)}.$$

Wyznaczamy pole powierzchni całkowitej ostrosłupa *ABCD*:

$$P_c=P_{\triangle ABC}+P_{\triangle ABD}+2\cdot P_{\triangle ACD}=\frac{b^2\sin\alpha}{4\left(1-\cos\alpha\right)}+\frac{b^2\sin\alpha}{4\cos\beta\left(1-\cos\alpha\right)}+\frac{b^2\,\mathrm{tg}\beta\sin\alpha}{2\sqrt{2\left(1-\cos\alpha\right)}\cdot\left(1-\cos\alpha\right)}=$$

$$=\frac{b^2\sin\alpha}{4\left(1-\cos\alpha\right)}\left(1+\frac{1}{\cos\beta}+\frac{2\mathrm{tg}\beta}{\sqrt{2\left(1-\cos\alpha\right)}}\right).$$

Schemat punktowania II sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania .... 1 p.

Zdający wyznaczy długość ramienia *x* trójkąta *ABC*: $x=\frac{b}{\sqrt{2\left(1-\cos\alpha\right)}}$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 p.

Zdający wyznaczy wysokość *h* podstawy ostrosłupa *ABCD*: $h=\frac{b\sin\alpha}{2\left(1-\cos\alpha\right)}$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 p.

Zdający wyznaczy

- wysokość *H* ostrosłupa *ABCD*: $H=\frac{b\,\mathrm{tg}\beta\sin\alpha}{2\left(1-\cos\alpha\right)}$.

albo

- wysokość *d* ściany *ABD*: $d=\frac{b\sin\alpha}{2\cos\beta\left(1-\cos\alpha\right)}$ i wyznaczy pole trójkąta

  $P_{\triangle ABD}=\frac{b^2\sin\alpha}{4\cos\beta\left(1-\cos\alpha\right)}$.

Uwaga! W przypadku obliczenia wysokości *H* ostrosłupa i pola ściany *ABD* zdający otrzymuje **4 punkty**.

Rozwiązanie prawie pełne .... 5 p.

Zdający

- obliczy objętość $\frac{b^3\,\mathrm{tg}\beta\sin^2\alpha}{24\left(1-\cos\alpha\right)^2}$

albo

- obliczy pole powierzchni całkowitej $P_c = \dfrac{b^2 \sin\alpha}{4(1-\cos\alpha)}\left(1+\dfrac{1}{\cos\beta}+\dfrac{2\mathrm{tg}\beta}{\sqrt{2(1-\cos\alpha)}}\right)$

Rozwiązanie pełne .... 6 p.

Zdający obliczy objętość $\dfrac{b^3\,\mathrm{tg}\beta \sin^2\alpha}{24(1-\cos\alpha)^2}$ oraz obliczy pole powierzchni całkowitej:

$$P_c = \frac{b^2 \sin\alpha}{4(1-\cos\alpha)}\left(1+\frac{1}{\cos\beta}+\frac{2\mathrm{tg}\beta}{\sqrt{2(1-\cos\alpha)}}\right).$$

Zadanie 8. (0–4)

Z cyfr 0, 1, 2 tworzymy pięciocyfrowe liczby całkowite dodatnie podzielne przez 15. Oblicz, ile możemy utworzyć takich liczb.

Przykładowe rozwiązanie

Liczba podzielna przez 15 jest podzielna przez 3 i przez 5. Aby z cyfr 0, 1, 2 utworzyć liczbę podzielną przez 5, ostatnią cyfrą tej liczby musi być 0. Aby ponadto liczba była podzielna przez 3, suma cyfr utworzonej liczby musi być podzielna przez 3. Mamy więc cztery przypadki:

- $1+1+1+0+0$ takich liczb jest 3: 11100, 11010, 10110.
- $2+2+2+0+0$ takich liczb jest 3: 22200, 22020, 20220.
- $1+1+2+2+0$ takich liczb jest 6: z czterech miejsc wybieramy dwa miejsca dla jedynek, na pozostałych wstawiamy dwójki.
- $1+2+0+0+0$ takich liczb 6: jedynkę wstawiamy na pierwszym miejscu, dwójkę na jednym z trzech pozostałych, lub na odwrót.

Razem mamy więc 18 liczb pięciocyfrowych, podzielnych przez 15, które można utworzyć dysponując jedynie cyframi 0, 1, 2.

Schemat punktowania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania .... 1 p.

Zdający zapisze, że ostatnią cyfrą utworzonej liczby jest 0.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 p.

Zdający zapisze, że są cztery możliwości uzyskania sumy cyfr podzielnej przez 3.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 p.

Zdający poprawnie obliczy liczby liczb w co najmniej trzech z czterech wymienionych przypadków.

Rozwiązanie pełne .... **4 p.**

Zdający obliczy, że jest 18 liczb pięciocyfrowych, podzielnych przez 15, które można utworzyć dysponując jedynie cyframi 0, 1, 2.

Uwaga

Jeżeli zdający pominie jeden przypadek i rozwiąże zadanie do końca otrzymuje **3 punkty**.

Zadanie 9. (0–6)

Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których równanie $x^2-3mx+2m^2+1=0$ ma dwa różne rozwiązania takie, że każde należy do przedziału $\left(-\infty,\ 3\right)$.

I sposób rozwiązania

Równanie $x^2-3mx+2m^2+1=0$ ma dwa różne rozwiązania, gdy $\Delta>0$.
Obliczamy wyróżnik: $\Delta=9m^2-4\left(2m^2+1\right)=m^2-4$

Rozwiązaniem nierówności $m^2-4>0$ są: $m\in\left(-\infty,-2\right)\cup\left(2,\infty\right)$.

Rozpatrujemy warunki: $\begin{cases}x_1<3\\ x_2<3\end{cases}$, które są równoważne warunkom $\begin{cases}x_1-3<0\\ x_2-3<0\end{cases}$

Warunki te są spełnione, gdy:
$x_1-3+x_2-3<0$ oraz $\left(x_1-3\right)\cdot\left(x_2-3\right)>0$

$x_1+x_2-6<0$ oraz $x_1x_2-3\left(x_1+x_2\right)+9>0$

Stosujemy wzory Viète'a:

$3m-6<0$ i $2m^2+1-3\left(3m\right)+9>0$

$3m<6$ i $2m^2-9m+10>0$, a stąd otrzymujemy $m<2$.
Wyznaczamy część wspólną warunków:
$m\in\left(-\infty,-2\right)\cup\left(2,\infty\right)$ oraz $m<2$.

Warunki zadania są spełnione dla $m\in\left(-\infty,-2\right)$.

Schemat punktowania I sposobu rozwiązania

Rozwiązanie zadania składa się z trzech etapów. **Pierwszy** z nich polega na rozwiązaniu nierówności $\Delta>0$: $m\in\left(-\infty,-2\right)\cup\left(2,\infty\right)$. Za poprawne rozwiązanie tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**.

Uwaga

Jeżeli zdający zapisze $\Delta\geq 0$, to za tę część otrzymuje **0 punktów**.

Drugi etap polega na rozwiązaniu układu nierówności $x_1-3+x_2-3<0$ oraz $\left(x_1-3\right)\cdot\left(x_2-3\right)>0$.

Za tę część rozwiązania zdający otrzymuje **4 punkty**.

Trzeci etap polega na wyznaczeniu części wspólnej rozwiązań nierówności z etapu pierwszego i drugiego. Za poprawne rozwiązanie trzeciego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**.

Podział punktów za drugi etap rozwiązania:
1 punkt zdający otrzymuje za

- zapisanie układu $\begin{cases} x_1 < 3 \\ x_2 < 3 \end{cases}$ w postaci $\begin{cases} x_1 - 3 < 0 \\ x_2 - 3 < 0 \end{cases}$

3 punkty zdający otrzymuje za

- zapisanie układu nierówności $x_1 - 3 + x_2 - 3 < 0$ oraz $(x_1 - 3)\cdot(x_2 - 3) > 0$
  w postaci układu nierówności z niewiadomą *m*, np. $3m < 6$ i $2m^2 - 9m + 10 > 0$.

Uwaga. Jeżeli zdający zapisze układ $\begin{cases} x_1 - 3 < 0 \\ x_2 - 3 < 0 \end{cases}$ i jedną z nierówności $3m < 6$ albo $2m^2 - 9m + 10 > 0$, to otrzymuje **2 punkty** za II etap.

4 punkty zdający otrzymuje za rozwiązanie układu nierówności: $m < 2$.

Rozwiązanie pełne *(trzy etapy)* **...6 pkt**
Wyznaczenie części wspólnej zbiorów rozwiązań nierówności i podanie odpowiedzi:
$m \in (-\infty, -2)$.

Uwaga
Przyznajemy **1 punkt** za wyznaczenie części wspólnej zbiorów rozwiązań nierówności z etapu I i etapu II, gdy co najmniej jedna nierówność (albo z etapu I, albo z etapu II) jest rozwiązana poprawnie.

II sposób rozwiązania
Rozpatrujemy funkcję kwadratową $f(x) = x^2 - 3mx + 2m^2 + 1$.
Aby obydwa rozwiązania podanego równania były mniejsze od 3, funkcja $f(x) = x^2 - 3mx + 2m^2 + 1$ musi spełniać następujące warunki:

- $f(3) > 0$,
- $x_w < 3$,
- $y_w < 0$, który jest równoważny warunkowi $\Delta > 0$.

gdzie (x_w, y_w), to współrzędne wierzchołka paraboli będącej wykresem funkcji *f*.
Rozpatrujemy warunki:

- $f(3) = 9 - 9m + 2m^2 + 1 > 0$,
  $2m^2 - 9m + 10 > 0$ i otrzymujemy $m \in (-\infty, 2) \cup \left(2\frac{1}{2}, \infty\right)$.
- $x_w < 3$, czyli $\frac{3m}{2} < 3$. Stąd otrzymujemy $m < 2$.
- $\Delta = 9m^2 - 4(2m^2 + 1) = m^2 - 4$
  $\Delta > 0$ gdy $m \in (-\infty, -2) \cup (2, \infty)$.

Warunki zadania są spełnione dla $m \in (-\infty, -2)$.

Schemat punktowania II sposobu rozwiązania
Rozwiązanie zadania składa się z trzech etapów. **Pierwszy** z nich polega na rozwiązaniu nierówności $\Delta > 0$: $m \in (-\infty, -2) \cup (2, \infty)$. Za poprawne rozwiązanie tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**.
Uwaga
Jeżeli zdający zapisze $\Delta \geq 0$, to za tę część otrzymuje **0 punktów**.

Drugi etap polega na rozwiązaniu układu nierówności:
$f(3) > 0$ i $x_w < 3$.
Za tę część rozwiązania zdający otrzymuje **4 punkty**.

Trzeci etap polega na wyznaczeniu części wspólnej rozwiązań nierówności z etapu pierwszego i drugiego. Za poprawne rozwiązanie trzeciego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**.

Podział punktów za drugi etap rozwiązania:
1 punkt zdający otrzymuje za
- zapisanie układu warunków $f(3) > 0$ oraz $x_w < 3$

3 punkty zdający otrzymuje za
- zapisanie układu nierówności $f(3) > 0$ oraz $x_w < 3$ w postaci układu nierówności z niewiadomą *m*, np. $2m^2 - 9m + 10 > 0$ i $3m < 6$.

Uwaga. Jeżeli zdający zapisze układu warunków $f(3) > 0$ oraz $x_w < 3$ i jedną z nierówności $3m < 6$ albo $2m^2 - 9m + 10 > 0$, to otrzymuje **2 punkty** za II etap.
4 punkty zdający otrzymuje za
- rozwiązanie układu nierówności: $m < 2$.

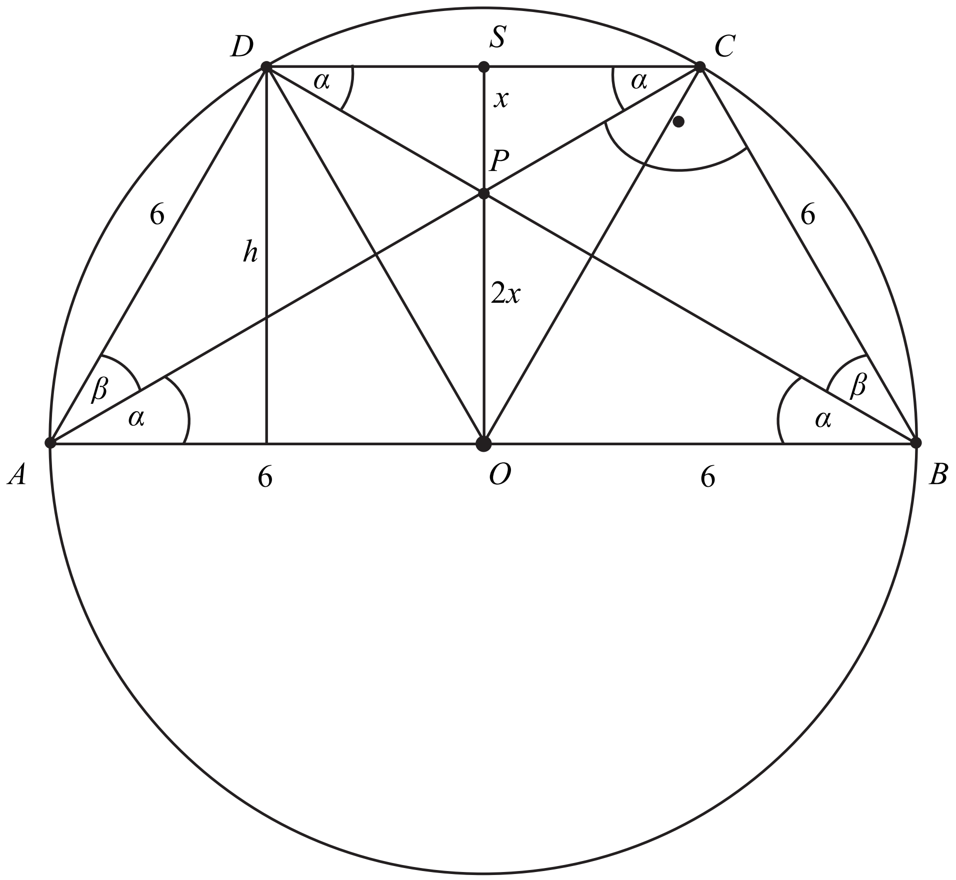
Rozwiązanie pełne *(trzy etapy)* **...6 pkt**
Wyznaczenie części wspólnej zbiorów rozwiązań nierówności i podanie odpowiedzi:
$m \in (-\infty, -2)$.
Uwaga
Przyznajemy **1 punkt** za wyznaczenie części wspólnej zbiorów rozwiązań nierówności z etapu I i etapu II, gdy co najmniej jedna nierówność (albo z etapu I, albo z etapu II) jest rozwiązana poprawnie.

Zadanie 10. (0–6)

Trapez równoramienny $ABCD$ o ramieniu długości 6 wpisany jest w okrąg, przy czym dłuższa podstawa AB trapezu, o długości 12, jest średnicą tego okręgu. Przekątne AC i BD trapezu przecinają się w punkcie P. Oblicz pole koła wpisanego w trójkąt ABP.

Rozwiązanie

Wprowadźmy oznaczenia jak na rysunku.



Przyjmujemy, że $\sphericalangle CAO = \sphericalangle DBO = \alpha$.

Kąty CAO i ACD są naprzemianległe, podobnie jak kąty DBO i BDC.

Zatem $\sphericalangle ACD = \sphericalangle BDC = \alpha$.

Odcinek AB jest średnicą okręgu, zatem $\sphericalangle ACB = 90^\circ$.

Trapez $ABCD$ jest wpisany w okrąg. Stąd $\alpha + \beta + 90^\circ + \alpha = 180^\circ$, czyli $2\alpha + \beta = 90^\circ$ (*).

Ponadto trójkąt AOD jest równoboczny, zatem $\alpha + \beta = 60^\circ$ (**).

Z warunków (*) i (**) wynika, że $\alpha = \beta = 30^\circ$.

Wysokość h trapezu jest równocześnie wysokością trójkąta równobocznego o boku 6.

Zatem $h = 3\sqrt{3}$.

Trójkąty *ABP* i *CDP* są podobne, bo kąty *APB* i *CPD* są wierzchołkowe, a pozostałe kąty w tych trójkątach mają miarę 30°. Skalę podobieństwa wyznacza stosunek $\frac{|AB|}{|CD|}=2$, bo trójkąt ACD jest równoramienny i $|CD|=|AD|=6$.

Zatem $|PO|=\frac{2}{3}h=2\sqrt{3}$.

Wyznaczmy długości odcinków *AP* i *BP*. $|AP|=|BP|=\frac{2}{3}|AC|=\frac{2}{3}\cdot 6\sqrt{3}=4\sqrt{3}$.

Obliczamy pole trójkąta *ABP*.

$$P_{ABP}=\frac{1}{2}\cdot|AB|\cdot|PO|=\frac{1}{2}\cdot 12\cdot 2\sqrt{3}=12\sqrt{3}.$$

Wykorzystamy zależność między polem trójkąta, jego obwodem i promieniem okręgu wpisanego w trójkąt.

$$12\sqrt{3}=\frac{4\sqrt{3}+4\sqrt{3}+12}{2}\cdot r.$$

Stąd $r=12-6\sqrt{3}$.

Obliczamy pole koła wpisanego w trójkąt *ABP*.

$$P=\pi r^2=\pi\left(12-6\sqrt{3}\right)^2=\left(252-144\sqrt{3}\right)\pi.$$

Schemat punktowania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania .... 1 p.

Zdający

- zapisze, że $\alpha=\beta=30^\circ$

albo

- zapisze, że trójkąty *ABP* i *CDP* są podobne.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 p.

Zdający obliczy wysokość trapezu: $h=3\sqrt{3}$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 4 p.

Zdający obliczy pole trójkąta *ABP*: $P_{ABP}=12\sqrt{3}$.

Uwaga. Jeżeli zdający

- obliczy wysokość trójkąta *ABP*: $|PO|=2\sqrt{3}$

lub

- obliczy długości boków trójkąta *ABP*: $|PO| = 2\sqrt{3}$, $|AP| = |BP| = 4\sqrt{3}$,

to otrzymuje **3 punkty**.

Rozwiązanie prawie pełne .... **5 p.**

Zdający obliczy promień koła wpisanego w trójkąt *ABP*: $r = 12 - 6\sqrt{3}$.

Rozwiązanie pełne .... **6 p.**

Zdający obliczy pole koła wpisanego w trójkąt *ABP*: $P = \left(252 - 144\sqrt{3}\right)\pi$.

Zadanie 11. (0-3)

Prawdopodobieństwo tego, że z pewnej grupy osób wylosujemy osobę znającą język angielski jest równe $0,4$, prawdopodobieństwo wylosowania osoby znającej język francuski jest równe $0,2$, natomiast prawdopodobieństwo wylosowania osoby znającej oba te języki jest równe $0,1$ Wykaż, że prawdopodobieństwo wylosowania osoby, która zna język angielski i nie zna języka francuskiego jest trzy razy większe od prawdopodobieństwa wylosowania osoby, która zna język francuski i nie zna języka angielskiego.

Przykładowe rozwiązanie

Oznaczmy zdarzenia:
A – wylosowana osoba zna język angielski
B – wylosowana osoba zna język francuski

$P(A) = 0,4$

$P(B) = 0,2$

$P(A \cap B) = 0,1$

$P(A \setminus B) = P\left(A \setminus (A \cap B)\right) = 0,4 - 0,1 = 0,3$

$P(B \setminus A) = P\left(B \setminus (A \cap B)\right) = 0,2 - 0,1 = 0,1$.

Zatem $P(A \setminus B) = 3P(B \setminus A)$.

Schemat punktowania

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... **1 p.**

Zdający obliczy prawdopodobieństwo:

- $P(A \setminus B) = P\left(A \setminus (A \cap B)\right) = 0,4 - 0,1 = 0,3$

albo

- $P(B \setminus A) = P\left(B \setminus (A \cap B)\right) = 0,2 - 0,1 = 0,1$

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... **2 p.**

Zdający obliczy prawdopodobieństwa $P(A \setminus B) = P\left(A \setminus (A \cap B)\right) = 0,4 - 0,1 = 0,3$

oraz $P(B \setminus A) = P\left(B \setminus (A \cap B)\right) = 0,2 - 0,1 = 0,1$

Rozwiązanie pełne .... **3 p.**

Zdający zapisze, że $P(A \setminus B) = 3P(B \setminus A)$.

Uwaga
Jeżeli zdający sporządzi diagram, na którym zapisze prawdopodobieństwa: 0,3 i 0,1 i na tym zakończy otrzymuje **2 punkty**.