

**EGZAMIN MATURALNY
W ROKU SZKOLNYM 2016/2017**

**FORMUŁA DO 2014
(„STARA MATURA”)**

**MATEMATYKA
POZIOM PODSTAWOWY**

**ZASADY OCENIANIA ROZWIĄZAŃ ZADAŃ
ARKUSZ MMA-P1**

CZERWIEC 2017

Klucz punktowania zadań zamkniętych

Nr zad	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
Odp.	A	C	D	D	B	B	C	C	A	C	D	C	B	B	D	B	B	D	A	D	B	C	A	A	A

Zasady oceniania zadań otwartych

Uwaga: Akceptowane są wszystkie odpowiedzi merytorycznie poprawne i spełniające warunki zadania.

Zadanie 26. (0–2)

Rozwiąż nierówność $(x - \frac{1}{2})x > 3(x - \frac{1}{2})(x + \frac{1}{3})$.

Przykładowe rozwiązanie

Rozwiązanie nierówności kwadratowej składa się z dwóch etapów.

Pierwszy etap polega na wyznaczeniu pierwiastków trójmianu kwadratowego.

Drugi etap polega na zapisaniu zbioru rozwiązań nierówności.

Realizacja pierwszego etapu

I sposób

Zapisujemy nierówność w postaci równoważnej $-2x^2 + \frac{1}{2} > 0$.

Znajdujemy pierwiastki trójmianu kwadratowego $-2x^2 + \frac{1}{2}$. Możemy to zrobić na kilka sposobów:

- obliczamy wyróżnik tego trójmianu:

$$\Delta = 0^2 - 4 \cdot (-2) \cdot \frac{1}{2} = 4 \text{ i stąd } x_1 = \frac{0-2}{-4} = \frac{1}{2} \text{ oraz } x_2 = \frac{0+2}{-4} = -\frac{1}{2}$$

albo

- stosujemy wzory Viète'a:

$$x_1 \cdot x_2 = -\frac{1}{4} \text{ oraz } x_1 + x_2 = 0, \text{ stąd } x_1 = -\frac{1}{2} \text{ oraz } x_2 = \frac{1}{2}$$

albo

- zapisujemy postać iloczynową trójmianu $-2(x - \frac{1}{2})(x + \frac{1}{2})$, z której odczytujemy pierwiastki: $x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{1}{2}$.

Uwaga

Postać iloczynową możemy też otrzymać, zauważając, że po obu stronach nierówności występuje ten sam czynnik $(x - \frac{1}{2})$. Wtedy nierówność możemy przekształcić równoważnie

$$\begin{aligned} (x - \frac{1}{2}) \left[x - 3 \left(x + \frac{1}{3} \right) \right] &> 0, \\ (x - \frac{1}{2})(-2x - 1) &> 0. \end{aligned}$$

II sposób

Przekształcamy nierówność do postaci równoważnej $x^2 < \frac{1}{4}$, a następnie korzystamy z własności wartości bezwzględnej, otrzymując $|x| < \frac{1}{2}$. Zaznaczamy na osi liczbowej te liczby x , które są oddalone od 0 o $\frac{1}{2}$: $x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{1}{2}$.

Realizacja drugiego etapu

Zapisujemy zbiór rozwiązań nierówności: $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ lub $x \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ lub $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$.

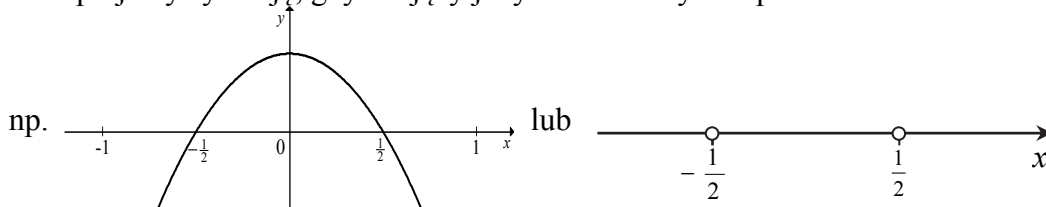
Schemat punktowania rozwiązania

Zdający otrzymuje 1 p.
gdy:

- zrealizuje pierwszy etap rozwiązania, czyli obliczy lub poda pierwiastki trójmianu kwadratowego $x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{1}{2}$ i na tym poprzestanie lub błędnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności.

Uwaga

Akceptujemy sytuację, gdy zdający jedynie zaznaczy oba pierwiastki na osi liczbowej,



albo

- realizując pierwszy etap popełni błędy (ale otrzyma dwa różne pierwiastki, a wyznaczony wyróżnik trójmianu kwadratowego jest dodatni) i konsekwentnie do tego rozwiąże nierówność, np.
 - popełni błędy rachunkowy przy przekształcaniu nierówności, przy obliczaniu wyróżnika lub pierwiastków trójmianu kwadratowego i konsekwentnie do popełnionych błędów rozwiąże nierówność,
 - błędnie zapisze równania wynikające ze wzorów Viète'a, np.: $x_1 + x_2 = -2$ i konsekwentnie do popełnionego błędu rozwiąże nierówność,
 - błędnie zapisze nierówność, np. $|x| > \frac{1}{2}$ i konsekwentnie do popełnionego błędu rozwiąże nierówność.

Zdający otrzymuje 2 p.
gdy:

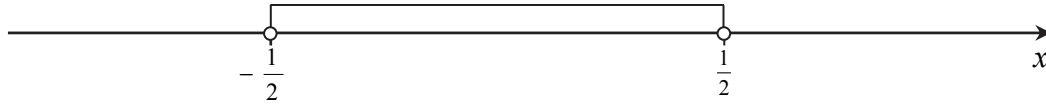
- poda zbiór rozwiązań nierówności: $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ lub $x \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, lub $(x > -\frac{1}{2}$ i $x < \frac{1}{2})$

albo

- sporządzi ilustrację geometryczną (oś liczbowa, wykres) i zapisze zbiór rozwiązań nierówności w postaci: $x > -\frac{1}{2}$, $x < \frac{1}{2}$

albo

- poda zbiór rozwiązań nierówności w postaci graficznej z poprawnie zaznaczonymi końcami przedziałów



Uwaga

Jeżeli zdający poprawnie obliczy pierwiastki trójmianu $x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{1}{2}$ i zapisze, np. $x \in (-2, \frac{1}{2})$, popełniając tym samym błąd przy przepisywaniu jednego z pierwiastków, to za takie rozwiązanie otrzymuje **2 punkty**.

Zadanie 27. (0–2)

Kąt α jest ostry i spełniona jest równość $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{\sqrt{7}}{2}$. Oblicz wartość wyrażenia $(\sin \alpha - \cos \alpha)^2$.

Przykładowe rozwiązanie

Ponieważ obie strony równości $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{\sqrt{7}}{2}$ są liczbami dodatnimi, więc po podniesieniu obu stron do kwadratu otrzymamy równość równoważną

$$\sin^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha = \frac{7}{4}.$$

Stąd $2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{3}{4}$. Z drugiej strony w zadaniu należy obliczyć wartość wyrażenia

$$(\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = \sin^2 \alpha - 2 \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha = 1 - 2 \sin \alpha \cos \alpha.$$

Otrzymujemy zatem $(\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$.

Schemat punktowania I sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje **1 p.**
gdy

- zapisze, że równość $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{\sqrt{6}}{2}$ jest równoważna równości $2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{3}{4}$

albo

- zapisze, że $(\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = 1 - 2 \sin \alpha \cos \alpha$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Zdający otrzymuje 2 p.

gdy obliczy i zapisze, że $(\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = \frac{1}{4}$.

Rozwiązanie (II sposób)

Z podanej równości $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{\sqrt{7}}{2}$ wyznaczamy $\sin \alpha = \frac{\sqrt{7}}{2} - \cos \alpha$ i podstawiamy do tożsamości $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$. Otrzymujemy równanie

$$\left(\frac{\sqrt{7}}{2} - \cos \alpha\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1,$$

czyli

$$\frac{7}{4} - \sqrt{7} \cos \alpha + 2 \cos^2 \alpha = 1.$$

Rozwiązujemy zatem równanie kwadratowe

$$2 \cos^2 \alpha - \sqrt{7} \cos \alpha + \frac{3}{4} = 0.$$

Wyróżnik trójmianu stojącego po lewej stronie równania jest równy

$$\Delta = 7 - 4 \cdot 2 \cdot \frac{3}{4} = 1.$$

Stąd wynika, że równanie ma dwa rozwiązania $\cos \alpha = \frac{\sqrt{7}+1}{4}$ oraz $\cos \alpha = \frac{\sqrt{7}-1}{4}$. Oba rozwiązania są liczbami dodatnimi i mniejszymi od jedności.

$$\text{Jeśli } \cos \alpha = \frac{\sqrt{7}+1}{4}, \text{ to } \sin \alpha = \frac{\sqrt{7}}{2} - \frac{\sqrt{7}+1}{4} = \frac{\sqrt{7}-1}{4}.$$

$$\text{Jeśli } \cos \alpha = \frac{\sqrt{7}-1}{4}, \text{ to } \sin \alpha = \frac{\sqrt{7}}{2} - \frac{\sqrt{7}-1}{4} = \frac{\sqrt{7}+1}{4}.$$

Zatem, w pierwszej sytuacji

$$(\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = \left(\frac{\sqrt{7}-1}{4} - \frac{\sqrt{7}+1}{4}\right)^2 = \left(\frac{-2}{4}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

A w sytuacji drugiej

$$(\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = \left(\frac{\sqrt{7}+1}{4} - \frac{\sqrt{7}-1}{4}\right)^2 = \left(\frac{2}{4}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

Schemat punktowania II sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje 1 p.
gdy

- rozwiąże równanie $2 \cos^2 \alpha - \sqrt{7} \cos \alpha + \frac{3}{4} = 0$:

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{7}+1}{4} \text{ oraz } \cos \alpha = \frac{\sqrt{7}-1}{4}$$

albo

- rozwiąże równanie

$$2\sin^2 \alpha - \sqrt{7} \sin \alpha + \frac{3}{4} = 0 \text{ dla } \sin \alpha = \frac{\sqrt{7}+1}{4} \text{ oraz } \sin \alpha = \frac{\sqrt{7}-1}{4}$$

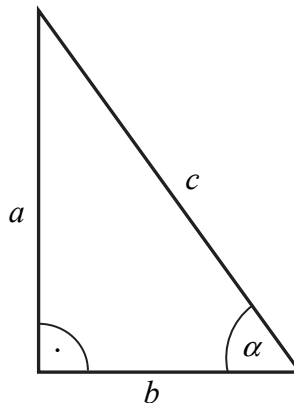
i na tym zakończy lub dalej popelni błędy.

Zdający otrzymuje **2 p.**

gdy obliczy i zapisze, że $(\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = \frac{1}{4}$.

Rozwiązanie (III sposób)

Rysujemy trójkąt prostokątny, oznaczamy długości jego boków oraz miarę kąta ostrego (zobacz rysunek).



Zauważamy najpierw, że równość wynikającą z twierdzenia Pitagorasa $a^2 + b^2 = c^2$ można zapisać w postaci równoważnej

$$\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = 1.$$

Podaną w treści zadania równość $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{\sqrt{7}}{2}$ zapisujemy w postaci $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{\sqrt{7}}{2}$

i podnosimy obie jej strony (są to liczby dodatnie) do potęgi drugiej. Otrzymujemy równość równoważną

$$\frac{a^2}{c^2} + 2 \cdot \frac{a}{c} \cdot \frac{b}{c} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{7}{4},$$

czyli, po uwzględnieniu równości $\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = 1$, równość

$$2 \cdot \frac{a}{c} \cdot \frac{b}{c} = \frac{3}{4}.$$

Z drugiej strony $(\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = \left(\frac{a}{c} - \frac{b}{c}\right)^2 = \frac{a^2}{c^2} - 2 \cdot \frac{a}{c} \cdot \frac{b}{c} + \frac{b^2}{c^2} = 1 - 2 \cdot \frac{a}{c} \cdot \frac{b}{c}$.

Zatem $(\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = 1 - 2 \cdot \frac{a}{c} \cdot \frac{b}{c} = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$.

Schemat punktowania III sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje **1 p.**
gdy

- skorzysta z definicji funkcji trygonometrycznych kąta ostrego w trójkącie prostokątnym i zapisze, że równość $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{\sqrt{7}}{2}$ jest równoważna równości

$$2 \cdot \frac{a}{c} \cdot \frac{b}{c} = \frac{3}{4}$$

albo

- zapisze, że $(\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = 1 - 2 \cdot \frac{a}{c} \cdot \frac{b}{c}$

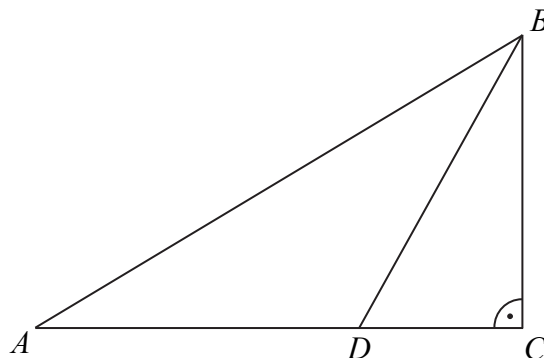
i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Zdający otrzymuje **2 p.**

gdy obliczy i zapisze, że $(\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = \frac{1}{4}$.

Zadanie 28. (0–2)

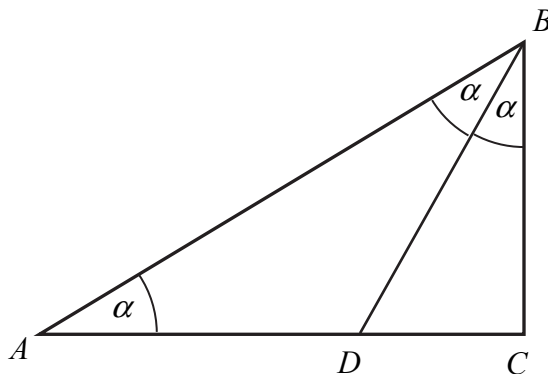
Dwusieczna kąta ostrego ABC przecina przyprostokątną AC trójkąta prostokątnego ABC w punkcie D .



Udowodnij, że jeżeli $|AD| = |BD|$, to $|CD| = \frac{1}{2} \cdot |BD|$.

Przykładowe rozwiązanie

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Trójkąt ACB jest prostokątny i odcinek BD zawiera się w dwusiecznej kąta ostrego ABC . Stąd wynika, że $|\sphericalangle CBD| = |\sphericalangle DBA| = \alpha$. Z równości $|AD| = |BD|$ wynika, że trójkąt ADB jest równoramienny, więc $|\sphericalangle DBA| = |\sphericalangle ADB| = \alpha$.

Suma kątów ostrych w trójkącie prostokątnym jest równa 90° , zatem $3\alpha = 90^\circ$, a stąd $\alpha = 30^\circ$. Wynika stąd, że trójkąt prostokątny CBD jest połową trójkąta równobocznego, a z własności tego trójkąta wynika, że $|CD| = \frac{1}{2} \cdot |BD|$, co należało wykazać.

Uwaga

Możemy też zauważyć, że $\frac{|CD|}{|BD|} = \sin \alpha = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$, skąd $|CD| = \frac{1}{2} \cdot |BD|$.

Schemat punktowania rozwiązania

Zdający otrzymuje 1 p.

gdy wywnioskuje, że $|\sphericalangle CBD| = |\sphericalangle DBA|$ oraz $|\sphericalangle DBA| = |\sphericalangle DAB|$ i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

Zdający otrzymuje 2 p.

gdy przeprowadzi pełne rozumowanie.

Zadanie 29. (0–2)

Wykaż, że prawdziwa jest nierówność

$$(1,5)^{100} < 6^{25}.$$

Przykładowe rozwiązanie (I sposób)

Nierówność powyższą zapisujemy w postaci równoważnej

$$\left((1,5)^4\right)^{25} < 6^{25}.$$

Wystarczy zatem pokazać, że $(1,5)^4 < 6$. Zauważamy, że $(1,5)^4 = \left(\frac{3}{2}\right)^4 = \frac{81}{16} = 5\frac{1}{16} < 6$.

A to kończy dowód.

Schemat punktowania I sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje 1 p.

gdy zapisze nierówność w postaci równoważnej $\left((1,5)^4\right)^{25} < 6^{25}$ i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy.

Zdający otrzymuje 2 p.

gdy przeprowadzi pełne poprawne rozumowanie.

Rozwiązanie (II sposób)

Nierówność powyższą zapisujemy w postaci równoważnej $\left(\frac{3}{2}\right)^{100} < 6^{25}$.

$$\text{Zatem } \frac{3^{100}}{2^{100}} < 2^{25} \cdot 3^{25}.$$

Ponieważ $2^{100} > 0$ i $3^{25} > 0$, więc po pomnożeniu obu stron powyższej nierówności przez $\frac{2^{100}}{3^{25}}$ otrzymujemy nierówność równoważną

$$3^{75} < 2^{125}.$$

Mamy zatem

$$(3^3)^{25} < (2^5)^{25}, \text{ czyli } 27^{25} < 32^{25}.$$

To kończy dowód, bo $27 < 32$.

Schemat punktowania II sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje 1 p.

gdy przekształci nierówność $(1,5)^{100} < 6^{25}$ do postaci równoważnej $3^{75} < 2^{125}$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Zdający otrzymuje 2 p.

gdy przeprowadzi pełne, poprawne rozumowanie.

Uwagi

1. Jeżeli zdający wykonuje po prawej stronie nierówności przekształcenia z wykorzystaniem przybliżeń, np.

$$6^{25} \approx (2,45)^{50} \approx (1,57)^{100},$$

to może otrzymać maksymalnie **1 punkt**.

2. Zdający może próbować zapisać prawą stronę nierówności w postaci potęgi o wykładniku równym 100. Może wtedy skorzystać z równości zawierających ułamki okresowe:

$$\frac{8}{3} = \frac{3}{2} \cdot 1,(7) \quad \text{oraz} \quad 1,(7) = \frac{3}{2} \cdot 1,(185).$$

Zadanie 30. (0–2)

Suma trzydziestu początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (a_n) , określonego dla $n \geq 1$, jest równa 30. Ponadto $a_{30} = 30$. Oblicz różnicę tego ciągu.

Przykładowe rozwiązanie

Zapisujemy wzór na sumę 30 początkowych wyrazów ciągu (a_n) z wykorzystaniem danych w zadaniu

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n, \text{ zatem}$$

$$30 = \frac{a_1 + 30}{2} \cdot 30$$

$$\frac{a_1 + 30}{2} = 1$$

$$a_1 + 30 = 2$$

$$a_1 = -28$$

Ponieważ $a_{30} = 30$ mamy

$$30 = a_1 + 29r \text{ stąd}$$

$$30 = -28 + 29r$$

$$58 = 29r$$

$$r = 2$$

Różnica ciągu (a_n) jest równa 2.

Schemat punktowania rozwiązania

Zdający otrzymuje1 pkt

gdy obliczy wyraz pierwszy ciągu (a_n) : $a_1 = -28$.

Zdający otrzymuje2 pkt

gdy obliczy różnicę ciągu (a_n) : $r = 2$.

Zadanie 31. (0–2)

Ze zbioru liczb $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$ losujemy bez zwracania dwa razy po jednej liczbie. Wylosowane liczby tworzą parę (a, b) , gdzie a jest wynikiem pierwszego losowania, b jest wynikiem drugiego losowania. Oblicz, ile jest wszystkich par (a, b) takich, że iloczyn $a \cdot b$ jest liczbą parzystą.

Przykładowe rozwiązanie (I sposób)

W zbiorze $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$ jest siedem liczb parzystych i osiem nieparzystych.

Losujemy bez zwracania dwa razy po jednej liczbie. Z wylosowanych liczb tworzymy pary. W wyniku losowania możemy otrzymać:

- obie wylosowane liczby są parzyste; takich par jest $7 \cdot 6 = 42$,
- jedna z wylosowanych liczb jest parzysta, a druga nieparzysta; takich par jest $8 \cdot 7 + 7 \cdot 8 = 112$,
- obie wylosowane liczby są nieparzyste; takich par jest $7 \cdot 8 = 56$.

Iloczyn dwóch liczb jest liczbą parzystą, gdy co najmniej jedna z nich jest parzysta. Zatem par liczb (a, b) , wylosowanych ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$, których iloczyn jest liczbą parzystą jest $42 + 112 = 154$.

Rozwiązanie (II sposób)

W zbiorze $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$ jest siedem liczb parzystych i osiem nieparzystych. Losujemy bez zwracania dwa razy po jednej liczbie. Z wylosowanych liczb tworzymy pary (a, b) . Szukamy tych par, których iloczyn składników jest liczbą parzystą.

Zatem:

- wybieramy te pary (a, b) , w których pierwsza z wylosowanych liczb jest parzysta, a druga nieparzysta; takich par jest $7 \cdot 8 = 56$,
- wybieramy te pary (a, b) , w których jedna wylosowana liczba jest parzysta, a druga jest liczbą ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$, różną od pierwszej liczby z tej pary; takich par jest $7 \cdot 7 \cdot 2 = 98$.

Zatem par liczb (a, b) , wylosowanych ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$, których iloczyn jest liczbą parzystą jest $56 + 98 = 154$.

Uwaga

Zbiór wszystkich utworzonych par lub tylko par odpowiadających warunkom zadania możemy też zapisać w tabeli, gdzie symbol ☺, użyty w tabeli, oznacza parę liczb, której iloczyn jest liczbą parzystą.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1		☺		☺		☺		☺		☺		☺		☺	
2	☺		☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺
3		☺		☺		☺		☺		☺		☺		☺	
4	☺	☺	☺		☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺
5		☺		☺		☺		☺		☺		☺		☺	
6	☺	☺	☺	☺	☺		☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺
7		☺		☺		☺		☺		☺		☺		☺	
8	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺		☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺
9		☺		☺		☺		☺		☺		☺		☺	
10	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺		☺	☺	☺	☺	☺
11		☺		☺		☺		☺		☺		☺		☺	
12	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺		☺	☺	☺
13		☺		☺		☺		☺		☺		☺		☺	
14	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺		☺
15		☺		☺		☺		☺		☺		☺		☺	

Schemat punktowania

Zdający otrzymuje1 p.
gdy:

- wyznaczy liczbę par, w których obie wylosowane liczby są parzyste: $7 \cdot 6 = 42$

albo

- zaznaczy w tabeli lub wypisze wszystkie pary utworzone z liczb parzystych i poda ich ilość: 42

albo

- wyznaczy liczbę par, w których wylosowano liczbę parzystą i nieparzystą:
 $2 \cdot 7 \cdot 8 = 112$

albo

- zaznaczy w tabeli lub wypisze wszystkie pary, w których jedna z liczb jest liczbą parzystą, a druga nieparzystą, i poda ich ilość: 112

albo

- wyznaczy liczbę par, w których wylosowano jako pierwszą liczbę parzystą, a jako drugą nieparzystą (albo pierwszą nieparzystą, a drugą parzystą): $7 \cdot 8 = 56$ (albo $8 \cdot 7 = 56$)

albo

- wyznaczy liczbę par, w których jedna wylosowana liczba jest parzysta, a druga jest liczbą ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$, różną od pierwszej liczby z tej pary; takich par jest $7 \cdot 7 \cdot 2 = 98$.

Zdający otrzymuje.....2 p.
gdy wyznaczy liczbę par, w których iloczyn składników jest liczbą parzystą: 154.

Uwaga

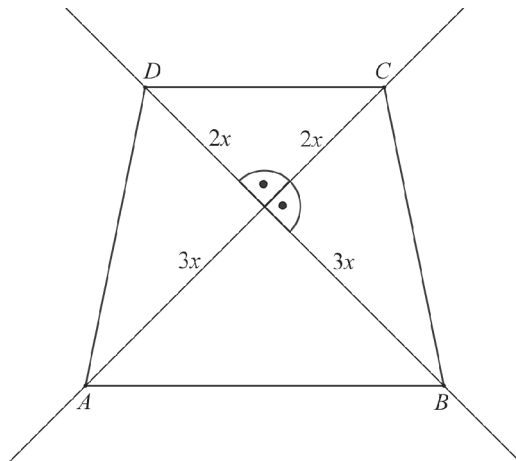
Jeżeli zdający wypisze lub zaznaczy w tabeli wszystkie pary liczb spełniające warunki zadania, ale pominie jeden z elementów przy zliczaniu (na jakimkolwiek etapie rozwiązania) i konsekwentnie rozwiąże zadanie do końca, to otrzymuje 1 punkt.

Zadanie 32. (0–4)

Ramię trapezu równoramiennego $ABCD$ ma długość $\sqrt{26}$. Przekątne w tym trapezie są prostopadłe, a punkt ich przecięcia dzieli je w stosunku $2 : 3$. Oblicz pole tego trapezu.

Przykładowe rozwiązanie (I sposób)

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Przekątne w trapezie są prostopadłe i dzielą się w stosunku $2 : 3$, zatem pole trapezu to suma dwóch trójkątów: o wysokości $2x$ i podstawie $5x$ oraz o wysokości $3x$ i podstawie $5x$. Korzystając z twierdzenia Pitagorasa, obliczamy długość przekątnych trapezu.

$$(2x)^2 + (3x)^2 = 26$$

$$4x^2 + 9x^2 = 26$$

$$13x^2 = 26$$

Stąd $x^2 = 2$. Zatem $x = \sqrt{2}$.

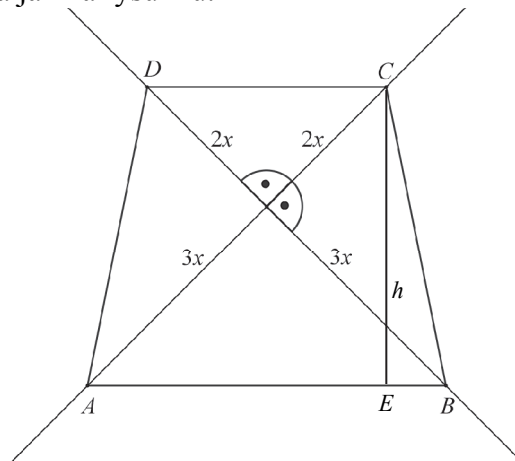
Przekątne mają długość $5\sqrt{2}$.

Obliczamy pole trapezu

$$P = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} \cdot 5\sqrt{2} + \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{2} \cdot 5\sqrt{2} = \frac{1}{2} \cdot 5\sqrt{2} \cdot 5\sqrt{2} = 25.$$

Rozwiązanie (II sposób)

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Przekątne w trapezie są prostopadłe i dzielą się w stosunku 2 : 3 .

Korzystając z twierdzenia Pitagorasa, obliczamy długość przekątnych trapezu.

$$(2x)^2 + (3x)^2 = 26$$

$$4x^2 + 9x^2 = 26$$

$$13x^2 = 26$$

Stąd $x^2 = 2$. Zatem $x = \sqrt{2}$.

Przekątne mają długość $5\sqrt{2}$.

Wyznaczamy długości podstaw i wysokość trapezu, korzystając z twierdzenia Pitagorasa. Ponieważ

$$|AB| = \sqrt{2 \cdot (3\sqrt{2})^2} = \sqrt{36} = 6, \quad |CD| = \sqrt{2 \cdot (2\sqrt{2})^2} = \sqrt{16} = 4 \quad \text{ i } \quad |EB| = \frac{|AB| - |CD|}{2} = 2 \quad \text{ oraz}$$

$$|BC| = \sqrt{(2\sqrt{2})^2 + (3\sqrt{2})^2} = \sqrt{26} .$$

$$\text{Zatem } h = \sqrt{(\sqrt{26})^2 - \left(\frac{6-4}{2}\right)^2} = 5, \text{ więc pole trapezu jest równe } P = \frac{6+4}{2} \cdot 5 = 25 .$$

Schemat punktowania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania 1 p.

Zdający zapisze długości przekątnych (lub ich odcinków) w zależności od jednej zmiennej, np.: $5x$, lub odcinków $2x$ i $3x$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp 2 p.

Zdający obliczy x : $x = \sqrt{2}$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 3 p.

Zdający

- zapisze pole trapezu jako funkcję jednej zmiennej, np.: $P = \frac{1}{2} \cdot 2x \cdot 5x + \frac{1}{2} \cdot 3x \cdot 5x$

albo

- obliczy długość przekątnych trapezu : $5\sqrt{2}$,

albo

- obliczy długości podstaw oraz wysokość trapezu: $|AB| = 6$, $|CD| = 4$, $h = 5$.

Rozwiązanie pełne 4 p.

Zdający obliczy pole trapezu: $P = 25$.

Zadanie 33. (0–4)

Punkty $A = (-2, -8)$ i $B = (14, -8)$ są wierzchołkami trójkąta równoramiennego ABC , w którym $|AB| = |AC|$. Wysokość AD tego trójkąta jest zawarta w prostej o równaniu $y = \frac{1}{2}x - 7$. Oblicz współrzędne wierzchołka C tego trójkąta.

Przykładowe rozwiązanie (I sposób)

Niech $C = (x, y)$. Ponieważ prosta AD jest wysokością trójkąta ABC , więc podstawa BC jest zawarta w prostej prostopadłej do prostej AD . Prosta BC jest więc określona równaniem postaci

$$y = -2x + b.$$

Ponieważ punkt B leży na prostej BC , więc otrzymujemy równość

$$-8 = -28 + b, \text{ skąd wynika, że } b = 20.$$

Proste AD i BC przecinają się w punkcie D , więc współrzędne tego punktu są rozwiązaniem układu równań

$$\begin{cases} y = -2x + 20 \\ y = \frac{1}{2}x - 7 \end{cases}$$

Rozwiązujemy ten układ równań i otrzymujemy $D = \left(\frac{54}{5}, -\frac{8}{5}\right)$. Ponieważ punkt D jest środkiem odcinka BC , więc jego współrzędne spełniają równania

$$\frac{x+14}{2} = \frac{54}{5} \text{ i } \frac{y-8}{2} = -\frac{8}{5},$$

gdzie x i y to współrzędne punktu C . Rozwiązujemy obydwa równania i otrzymujemy odpowiedź

$$C = \left(\frac{38}{5}, \frac{24}{5}\right).$$

Schemat punktowania I sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania 1 p.

Zdający wyznaczy równanie prostej, w której zawarty jest podstawa BC tego trójkąta

$$y = -2x + 20$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp 2 p.

Zdający zapisze układ równań pozwalający obliczyć współrzędne punktu D

$$y = -2x + 20 \text{ i } y = \frac{1}{2}x - 7$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 3 p.

Zdający obliczy współrzędne punktu D

$$D = \left(\frac{54}{5}, -\frac{8}{5} \right)$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie pełne 4 p.

Zdający obliczy współrzędne szukanego wierzchołka C tego trójkąta

$$C = \left(\frac{38}{5}, \frac{24}{5} \right).$$

Uwaga

Jeśli zdający rozpatruje trójkąt równoramienny ABC , w którym $|AC| = |BC|$ albo zakłada, że $|\sphericalangle BAC| = 90^\circ$, to za całe rozwiązanie otrzymuje **0 punktów**.

Rozwiązanie (II sposób)

Zbudujemy układ równań: okrąg o środku w punkcie A i promieniu $|AB|$ oraz prosta BC .

Rozwiązaniem tego układu są dwa punkty: dany punkt B oraz szukany punkt C . Ponieważ promień $|AB|$ tego okręgu jest równy 16, więc równanie okręgu jest następujące:

$$(x+2)^2 + (y+8)^2 = 16^2.$$

Prosta AD jest wysokością trójkąta ABC , zatem podstawa BC jest zawarta w prostej prostopadłej do prostej AD . Prosta BC jest więc określona równaniem postaci

$$y = -2x + b.$$

Ponieważ punkt B leży na prostej BC , więc otrzymujemy równość

$$-8 = -28 + b, \text{ skąd wynika, że } b = 20.$$

Mamy zatem układ równań $(x+2)^2 + (y+8)^2 = 16^2$ i $y = -2x + 20$.

Po podstawieniu wyrażenia $y = -2x + 20$ do pierwszego równania w miejsce zmiennej y otrzymujemy równanie kwadratowe z jedną niewiadomą

$$(x+2)^2 + (28-2x)^2 = 16^2.$$

Wykonujemy wskazane działania i porządkujemy to równanie do postaci:

$$5x^2 - 108x + 532 = 0.$$

Wyróżnik Δ trójmianu $5x^2 - 108x + 532$ jest dodatni i równy 1024, zatem równanie ma dwa rozwiązania:

$$x = \frac{108+32}{10} = 14 \text{ i } x = \frac{108-32}{10} = \frac{76}{10} = \frac{38}{5}.$$

Jeśli $x = 14$, to $y = -28 + 20 = -8$ i to są współrzędne danego punktu B .

Jeśli $x = \frac{38}{5}$, to $y = -\frac{76}{5} + 20 = \frac{24}{5}$ i to są współrzędne szukanego punktu C . Zatem

$$C = \left(\frac{38}{5}, \frac{24}{5} \right).$$

Schemat punktowania II sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprowadzić niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania 1 p.

Zdający:

- wyznaczy równanie prostej, w której zawarta jest podstawa BC trójkąta ABC

$$y = -2x + 20$$

albo

- zapisze równanie $(x+2)^2 + (y+8)^2 = 16^2$ okręgu o środku w punkcie A i promieniu

$$|AB|$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp 2 p.

Zdający zapisze układ równań $(x+2)^2 + (y+8)^2 = 16^2$ i $y = -2x + 20$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 3 p.

Zdający zapisze równanie kwadratowe

$$5x^2 - 108x + 532 = 0$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie pełne 4 p.

Zdający obliczy współrzędne szukanego wierzchołka C tego trójkąta

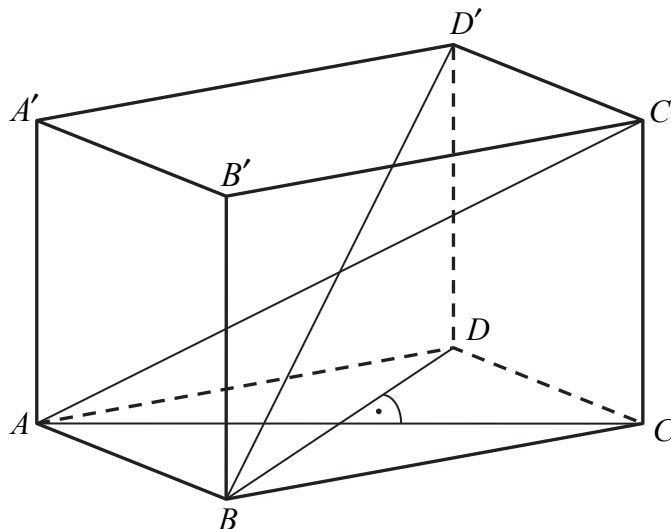
$$C = \left(\frac{38}{5}, \frac{24}{5} \right).$$

Uwaga

Jeśli zdający rozpatruje trójkąt równoramienny ABC , w którym $|AC| = |BC|$ albo zakłada, że $|\sphericalangle BAC| = 90^\circ$, to za całe rozwiązanie otrzymuje **0 punktów**.

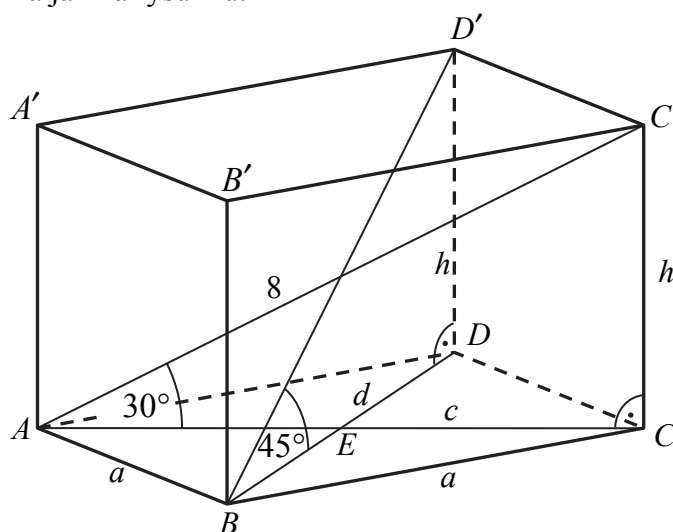
Zadanie 34. (0–5)

Podstawą graniastoslupa prostego $ABCDA'B'C'D'$ jest romb $ABCD$. Przekątna AC' tego graniastoslupa ma długość 8 i jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 30° , a przekątna BD' jest nachylona do tej płaszczyzny pod kątem 45° . Oblicz pole powierzchni całkowitej tego graniastoslupa.



Przykładowe rozwiązanie

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Trójkąt prostokątny ACC' to połowa trójkąta równobocznego, więc

$$|AC| = \frac{|AC'| \sqrt{3}}{2} \quad \text{oraz} \quad |CC'| = \frac{|AC'|}{2},$$

czyli

$$c = \frac{8\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3} \quad \text{oraz} \quad h = \frac{8}{2} = 4.$$

Trójkąt prostokątny BDD' to połowa kwadratu, więc $|BD| = |DD'|$, czyli

$$d = h = 4.$$

Przekątne rombu są prostopadłe i punkt ich przecięcia dzieli każdą z nich na połowy. Zatem trójkąt ABE jest prostokątny, a jego przyprostokątne mają długości

$$|AE| = \frac{1}{2}c = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{3} = 2\sqrt{3}, \quad |BE| = \frac{1}{2}d = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2.$$

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta ABE otrzymujemy

$$|AB|^2 = |AE|^2 + |BE|^2,$$

$$a^2 = (2\sqrt{3})^2 + 2^2 = 16.$$

Stąd $a = 4$.

Pole podstawy graniastosłupa jest równe

$$P_{ABCD} = \frac{1}{2}cd = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{3} \cdot 4 = 8\sqrt{3}.$$

Ponieważ $a = h = 4$, więc ściana boczna jest kwadratem o polu 16.

Zatem pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa jest równe

$$P_c = 2P_{ABCD} + P_b = 2 \cdot 8\sqrt{3} + 4 \cdot 16 = 16\sqrt{3} + 64 = 16(\sqrt{3} + 4).$$

Schemat punktowania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania..... 1 p.

Zdający

- obliczy długość przekątnej AC podstawy graniastosłupa: $|AC| = 4\sqrt{3}$

albo

- obliczy wysokość graniastosłupa: $h = 4$

albo

- zapisze, że $|BD| = |DD'|$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp 2 p.

Zdający obliczy długość przekątnej BD podstawy graniastosłupa: $|BD| = 4$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania..... 3 p.

Zdający obliczy pole podstawy graniastosłupa: $P_{ABCD} = 8\sqrt{3}$.

Rozwiązanie prawie pełne 4 p.

Zdający obliczy

- długość krawędzi podstawy graniastosłupa: $a = 4$

albo

- pole powierzchni całkowitej graniastosłupa, popełniając błędy rachunkowe.

Rozwiązanie pełne 5 p.

Zdający obliczy pole powierzchni całkowitej graniastosłupa: $P_c = 16\sqrt{3} + 64$.